VISIT…

Г. ЛАМБ

ГИДРОДИНАМИКА

ОГИЗ - ГОСТЕХИЗДАТ - 1947

Г. ЛАМБ

ГИДРОДИНАМИКА

ПЕРЕВОД С 6-го АНГЛИЙСКОГО ИЗДАНИЯ
А. В. ГЕРМОГЕНОВА и В. А. КУДРЯВЦЕВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ проф. Н. А. СЛЕЗКИНА

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1947 ЛЕНИНГРАД

Редактор *Н. А. Слезкин.* Техн. редактор *Н. А. Тумаркина*

Подписано к печати 21—XII 1946 г. 58 печ. л. 76,05 авт. л. 77,95 уч.-изд. л.
55 600 тип. знак в печ. л. Тираж 8 000 экз. А 08272 Заказ 1929

Цена книги 47 р., переплет 1 р.

Тип. „Красный Печатник", Ленинград, Международный пр., 73а.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга Ламба, являясь фундаментальным руководством, несомненно принадлежит к числу самых лучших книг всей мировой литературы по гидродинамике. Выход в свет этой книги на русском языке принесет большую пользу не только студентам и аспирантам физико-математических факультетов университетов, но и большому кругу научных работников, деятельность которых соприкасается в той или иной мере с вопросами гидродинамики.

Впервые эта книга была издана в 1879 г. в значительно меньшем объеме. С каждым новым изданием содержание ее перерабатывалось и расширялось. Последние значительные дополнения были внесены самим автором в 1932 г. при шестом издании, незадолго до своей смерти.

В книге Ламба нашла свое отражение бóльшая часть всей мировой литературы по многим вопросам гидродинамики, но не в одинаковой мере. Например, вопросам теории волн посвящена почти половина всей книги, тогда как вопросам, составляющим проблематику современной гидродинамики, уделялось раньше очень малое внимание. И лишь только в последнем, шестом, издании этим вопросам уделено бóльшее внимание, в частности были внесены добавления по теории пограничного слоя, по теории вихревого сопротивления, по теории неустановившегося движения плоского контура в идеальной жидкости, по электромагнитной аналогии и др.

Следует также указать, что работы известных русских ученых Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина и др. по ряду вопросов, затрагиваемых в различных главах гидродинамики Ламба, были освещены в очень малой степени. В этом отношении преимущественное положение безусловно занимают английские авторы и в первую очередь сам Ламб, перу которого принадлежит очень много результатов.

Изложение в большинстве случаев является очень сжатым, но вполне ясным и достаточным для уяснения сущности того или иного вопроса, что несомненно и составляет одно из достоинств этой книги.

Первые двести шестьдесят четыре параграфа переведены В. А. Кудрявцевым, а остальные А. В. Гермогеновым, причем перевод ими выполнялся с пятого английского издания и немецкого перевода этой книги под редакцией Мизеса. При редактировании же этот перевод был сличен с шестым английским изданием и все изменения и добавления были полностью внесены самим редактором.

Н. А. Слезкин

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Эта книга может рассматриваться как шестое издание Treatise on Hie Mathematical Theory of the Motion of Fluids, опубликованной в 1879 г. Последующие издания, значительно переработанные и расширенные, выходили уже с заголовком настоящей книги.

В настоящем издании в общий план и расположение материала не внесено каких-либо изменений, но все содержание вновь просмотрено, некоторые важные упущения восполнены и много нового материала добавлено.

Сам предмет за последние годы получил значительное развитие, например, в теории приливов, в различных направлениях, имеющих отношение к проблемам воздухоплавания, и др. В этой связи интересно отметить, что „классическая" гидродинамика, на которую часто ссылаются теперь с оттенком пренебрежения, снова нашла себе широкое поле для практических приложений. Некоторые из этих новых достижений по причине их широкой разработанности нельзя было целиком включить в эту книгу; пришлось ограничиться лишь указаниями на более важные результаты и на применяемые методы.

Как и в предшествующих изданиях, были приложены все усилия к тому, чтобы в подстрочных примечаниях указать тех авторов, которым мы обязаны соответствующими результатами; однако следует указать, что в самом тексте оригинальные доказательства часто были значительно видоизменены.

Я должен еще раз поблагодарить штат университетского издательства за большую помощь при издании настоящей книги.

Г. Ламб

Апрель 1932.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I

Уравнения движения

§ 1, 2. Основные свойства жидкости (13).—**§ 3.** Две формы исследования (14).—**§ 4—9.** Эйлерова форма уравнений движения (15).— Динамические уравнения. Уравнение неразрывности. Уравнение физического состояния жидкости. Граничные условия (20).—**§ 10.** Уравнение энергии (22).—**§ 10a.** Перенос количества движения (24).—**§ 11.** Мгновенно вызванное движение (25).—**§ 12.** Уравнения, отнесенные к подвижной системе координат (27).—**§ 13, 14.** Динамические уравнения движения и уравнение неразрывности в форме Лагранжа (28).—**§ 15, 16.** Преобразование Вебера (29).—**§ 16a.** Уравнения в полярных координатах (31).

Глава II

Интегрирование уравнений движения в частных случаях

§ 17. Потенциал скоростей. Теорема Лагранжа (32).—**§ 18, 19.** Физические и кинематические свойства функции φ (34).—**§ 20.** Интегрирование уравнений для потенциального движения. Уравнение давления (35).—**§ 21–23.** Установившееся движение. Вывод уравнения давления из принципа энергии. Предельное значение скорости (36).—**§ 24.** Истечение жидкости; сжатие струи (39).—**§ 24a, 25.** Истечение газов (42).—**§ 26—29.** Примеры вращающейся жидкости. Равномерное вращение. Вихрь Ранкина. Электромагнитные вращения (45).

Глава III

Безвихревое движение

§ 30. Анализ бесконечно малого движения элемента жидкости при деформации и вращении (48).—**§ 31, 32.** Поток и циркуляция. Теорема Стокса (50).—**§ 33.** Независимость циркуляции от времени (53).—**§ 34, 35.** Безвихревое движение в односвязной области; однозначность потенциала скорости (54).—**§ 36—39.** Несжимаемая жидкость; трубка тока. Функция φ не имеет максимума и минимума. Скорость не имеет максимума. Среднее значение функции φ на сферической поверхности (55).—**§ 40, 41.** Условия, определяющие функцию φ (59).—**§ 42—46.** Теорема Грина; динамическая интерпретация. Формула для кинетической энергии. Теорема Кельвина о минимуме энергии (62).—**§ 47, 48.** Многосвязные области; замкнутые кривые и сечения (68).—**§ 49—51.** Безвихревое движение в многосвязных областях; многозначность потенциала скорости; циклические постоян-

ные (70). — **§ 52.** Случай несжимаемой жидкости. Условия, определяющие функцию φ (73). — **§ 53—55.** Обобщение Кельвина для теоремы Грина; динамическая интерпретация; энергия безвихревого движения жидкости в циклической области (74). — **§ 56—58.** Источники и стоки. Дублеты. Замена безвихревого движения жидкости источниками, распределенными по поверхности (78).

Глава IV

Плоское движение несжимаемой жидкости

§ 59. Функция тока Лагранжа (83). — **§ 60, 60a.** Соотношение между функцией тока и потенциалом скорости. Источник в плоскости. Электрические аналогии (85). — **§ 61.** Кинетическая энергия (88). — **§ 62.** Связь с теорией функций комплексного переменного (88). — **§ 63, 64.** Простейшие случаи циклического и нециклического движения. Изображение источника относительно окружности. Потенциал скорости нескольких источников (91). — **§ 65, 66.** Формулы преобразования. Конфокальные кривые. Истечение из отверстий (95). — **§ 67.** Общая формула. Метод Фурье (93). — **§ 68.** Движение цилиндра без циркуляции; линии тока (99). — **§ 69.** Движение цилиндра с циркуляцией. Подъемная сила. Траектория при постоянной силе (101). — **§ 70.** Замечание к более общей задаче. Методы преобразований. Задача Кутта (104). — **§ 71.** Методы преобразования. Поступательное движение цилиндра. Случай эллиптического цилиндра. Обтекание наклонной пластинки. Результирующая давления жидкости (107). — **§ 72.** Движение жидкости, вызванное вращением твердого тела. Вращение призматического сосуда произвольного сечения. Вращение эллиптического цилиндра в безграничной жидкости; общий случай движения с циркуляцией (111). — **§ 72a.** Представление эффекта движущегося цилиндра в жидкости диполем (115). — **§ 72b.** Формула Блазиуса для силы воздействия потенциального потока при обтекании цилиндра. Применения; теорема Жуковского; сила, создаваемая источником (117). — **§ 73.** Струйное течение. Метод Шварца при конформном преобразовании (120). — **§ 74—78.** Насадок Борда. Истечение жидкости из прямоугольного отверстия. Коэфициент сжатия. Удар струи о перпендикулярную и наклонную пластинку. Вычисление сопротивления. Задача Бобылева (123). — **§ 79.** Разрывные движения (133). — **§ 80.** Обтекание поверхности (135).

Глава V

Безвихревое движение жидкости: трехмерные задачи

§ 81, 82. Специальные функции. Теория Максвелла о полюсах (137). — **§ 83.** Уравнение Лапласа в полярных координатах (140). — **§ 84, 85.** Зональные функции. Гипергеометрические ряды. (141). — **§ 86.** Тессеральные и секториальные функции (145). — **§ 87, 88.** Сопряженные поверхностные функции. Обобщения (147). — **§ 89.** Символическая запись уравнения Лапласа. Решение в форме определенного интеграла (149). — **§ 90, 91.** Приложение специальных функций к гидродинамике. Импульсивное давление на сферической поверхности. Условие для скорости по нормали. Энергия возникшего движения (150). — **§ 91a.** Примеры: Сжатие сферического воздушного пузырька. Расширение сферической полости под действием внутреннего давления (152). — **§ 92, 93.** Движение сферы в безграничной жидкости. Присоединенная масса. Сфера в жидкости с концентрической сферической границей (154). — **§ 94—96.** Стоксовы функции тока. Выражение в сферических функциях. Линии тока на сфере. Замена сферы диполем.

Распределение давления по сфере (157). — **§ 97.** Обратный метод Ранкина (162). — **§ 98, 99.** Движение двух сфер в жидкости; кинематические условия. Присоединенные массы (163). — **§ 100, 101.** Цилиндрические функции. Решение уравнения Лапласа в бесселевых функциях. Обобщение на произвольные функции (168). — **§ 102.** Гидродинамические примеры. Истечение из круглого отверстия. Присоединенная масса круглого диска (171). — **§ 103—106.** Эллипсоидальные функции для эллипсоида вращения. Решения уравнения Лапласа. Применение к движению эллипсоида вращения в жидкости (175). — **§ 107—109.** Функции для сплющенного эллипсоида. Истечение из круглого отверстия. Линии тока при обтекании круглого диска. Поступательное и вращательное движения сплющенного эллипсоида (180). — **§ 110.** Движение жидкости в эллипсоидальной полости (184). — **§ 111.** Общее выражение для $\Delta\varphi$ в ортогональных координатах (186). — **§ 112.** Софокусные поверхности второго порядка; эллиптические координаты (187). — **§ 113.** Истечение из эллиптического отверстия (189). — **§ 114—115.** Поступательное и вращательное движение эллипсоида в жидкости. Коэфициент присоединенной массы (191). — **§ 116.** Отношение к другим задачам. (196). — *Добавление к главе V.* Гидродинамические уравнения, отнесенные к общим ортогональным координатам (197).

Глава VI

Движение твердых тел в жидкости. Динамическая теория

§ 117, 118. Кинематические условия в случае одного тела (200). — **§ 119.** Теория импульсов (202). — **§ 120.** Уравнения движения жидкости в системе координат, связанной с телом (204). — **§ 121, 121a.** Кинетическая энергия. Коэфициент присоединенной массы. Представление движения жидкости вдали от тела диполям (204). — **§ 122, 123.** Компоненты импульса. Обратные формулы (207). — **§ 124.** Выражение для гидродинамических сил. Три постоянных направления движения; устойчивость (210). — **§ 125.** Возможные случаи установившегося движения. Движение от импульсивной пары (213). — **§ 126.** Гидрокинетическая симметрия (215). — **§ 127—129.** Движение тела вращения. Устойчивость движения, параллельного оси симметрии. Влияние вращения. Другие случаи установившегося движения (218). — **§ 130.** Движение винтовой поверхности (224). — **§ 131.** Коэфициент присоединенной массы жидкости, заключенной в движущейся твердой оболочке (224). — **§ 132—134.** Циклическое движение жидкости через отверстия в теле. Установившееся движение кольца; условия устойчивости (225). — **§ 135, 136.** Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах. Принцип Гамильтона. Применение в гидродинамике (233). — **§ 137, 138.** Примеры. Движение сферы вблизи твердой стенки. Движение двух сфер по линии их центров (237). — **§ 139—141.** Изменение уравнений Лагранжа в случае циклического движения; игнорирование координатами. Уравнения для вращающейся системы (241). — **§ 142, 143.** Кинетостатика. Гидродинамические силы, действующие на тело, обтекаемое ускоренным потоком (246). — **§ 144.** Замечание к интуитивному распространению принципов динамики (251).

Глава VII

Вихревое движение

§ 145. Вихревая линия и вихревая нить. Кинематические свойства (251). — **§ 146.** Постоянство вихрей. Доказательство Кельвина. Уравнения Коши, Стокса и Гельмгольца. Движение жидкости в неподвижном эллипсоидальном сосуде с постоянной угловой скоростью в

каждой точке (253). — **§ 147.** Условия, определяющие вихревое движение (259). — **§ 148, 149.** Выражение скорости через компоненты вихря; электромагнитные аналогии. Случай изолированного вихря (260). — **§ 150.** Потенциал скорости, создаваемый вихрями (265). — **§ 151.** Вихревой слой (267). — **§ 152, 153.** Количество движения и энергия вихревой системы (269). — **§ 154, 155.** Прямолинейные вихри. Линии тока вихревой пары. Другие примеры (275). — **§ 156.** Исследования устойчивости одинарного и двойного вихревого ряда. Вихревая дорожка Кармана (281). — **§ 157.** Теоремы Кирхгофа для параллельных вихрей (288). — **§ 158, 159.** Устойчивость вихревых колец. Эллиптический вихрь Кирхгофа (290). — **§ 159a.** Движение твердого тела во вращающейся жидкости (293). — **§ 160.** Вихри в криволинейном слое жидкости (298). — **§ 161—163.** Круговые вихри. Потенциал скорости и функция тока изолированного вихревого кольца. Линии тока. Импульс и энергия; скорость движения вихревого кольца (299). — **§ 164.** Взаимное влияние вихревых колец. Изображение вихревого кольца относительно сферы (305). — **§ 165.** Общие условия для установившегося движения жидкости. Цилиндрические и сферические вихри (307). — **§ 166.** Ссылки на другие работы (310). — **§ 166a.** Теоремы Бьеркнеса (311). — **§ 167.** Преобразование Клебша уравнений гидродинамики (312).

Глава VIII

Приливные волны

§ 168. Общая теория малых колебаний, главные колебания, вынужденные колебания (314). — **§ 169—174.** Свободные волны в прямолинейном канале; скорость распространения волны; эффект начальных условий; физический смысл различных приближений; энергия системы волн (320). — **§ 175.** Установившееся движение (328). — **§ 176.** Наложение волновых систем; отражение (330). — **§ 177—179.** Эффект возмущающих сил; свободные и вынужденные колебания в ограниченном канале (331). — **§ 180—184.** Каналовая теория приливов. Потенциал возмущающих сил. Приливы в экваториальном канале и канале, параллельном экватору; полусуточные и суточные приливы. Канал, совпадающий с меридианом. Изменение среднего уровня. Двухнедельный прилив. Экваториальный канал конечной длины. Продолжительность приливов (336). — **§ 185, 186.** Волны в канале произвольного сечения. Примеры свободных и вынужденных колебаний. Увеличение прилива в мелких морях и лиманах (344). — **§ 187, 188.** Волны конечной амплитуды. Изменение вида прогрессивной волны. Приливы второго порядка (350). — **§ 189, 190.** Движение волны в двух горизонтальных направлениях; общее уравнение. Колебание в прямоугольном бассейне (355). — **§ 191, 192.** Колебания в круглом бассейне. Функции Бесселя; эллиптический бассейн; приближение к медленному течению (358). — **§ 193.** Случай произвольной глубины. Круглый бассейн (365). — **§ 194—197.** Распространение возмущений от центра; функции Бесселя второго рода. Волны, вызванные местным периодическим давлением. Общая формула для расходящихся волн. Примеры на неустановившееся местное возмущение (367). — **§ 198—201.** Колебание тонкого сферического слоя воды; свободные и вынужденные волны. Эффект взаимного притяжения воды. Приложение к случаю океана, ограниченного меридианами и параллелями (378). — **§ 202, 203.** Уравнения движения динамической системы относительно вращающихся осей (385). — **§ 204—205a.** Малые колебания вращающейся системы; устойчивость обыкновенная и вековая. Влияния малой степени вращения на тип и частоту нормальных видов колебаний (388). — **§ 205b.** Приближенное вычисление частот (393). — **§ 206.** Вынужденные

колебания (396). — **§ 207, 208.** Гидродинамические примеры; приливные колебания вращающегося тонкого слоя воды; волны в сужающемся канале (398). — **§ 209—211.** Вращающийся круглый бассейн постоянной глубины; свободные и вынужденные колебания (402). — **§ 212.** Круглый бассейн произвольной глубины (409). — **§ 212a.** Примеры приближенных решений (412). — **§ 213, 214.** Приливные колебания на вращающемся земном шаре. Кинетическая теория Лапласа (414). — **§ 215—217.** Симметричные колебания. Приливы длинных периодов (419). — **§ 218—221.** Суточные и полусуточные приливы. Рассмотрение решений Лапласа (428). — **§ 222, 223.** Исследования Hough'a; цитаты и результаты (437). — **§ 223a.** Исследования Гальдсброу (443). — **§ 224.** Изменение кинетической теории для действительной конфигурации океана; вопрос фазы (444). — **§ 225, 226.** Устойчивость океана. Замечания относительно общей теории кинитеческой устойчивости (447). Приложение: Силы, вызывающие приливы (449).

Глава IX

Поверхностные волны

§ 227. Двухмерные задачи; условия на поверхности (455). — **§ 228.** Стоячие волны; линии тока (456). — **§ 229, 230.** Прогрессивные волны; траектории частиц. Скорость волны; числовая таблица. Энергия гармонической волны (458). — **§ 231.** Колебания границы раздела двух жидкостей (463). — **§ 232.** Неустойчивость границы двух потоков (467). — **§ 233, 234.** Стационарные пр грессивные волны (470). — **§ 235.** Волны в неоднородной жидкости (473). — **§ 236, 237.** Групповая скорость. Передача энергии (476). — **§ 238—240.** Задача Коши-Пуассона; волны, вызванные начальным местным возвышением жидкости или местным импульсом (481). — § **241.** Приближенная формула Кельвина для эффекта местного возмущения в середине прямой линии. Графические построения (494). — **§ 242—246.** Поверхностные возмущения в потоке. Случай конечной глубины. Влияние неровностей дна (498). — **§ 247.** Волны, возникающие при погружении цилиндра в жидкость (513). — **§ 248, 249.** Общая теория волн, возникающих при подвижном возмущении. Волновое сопротивление (516). — **§ 250.** Волны конечной высоты. Волны постоянного вида. Предельные формы (521). — **§ 251.** Волны Герстнера (526). — **§ 252, 253.** Одиночные волны. Колебательные волны Kortemeg'a и De Vries (528). — **§ 254.** Динамические условия Гельмгольца для волн постоянного вида (534). — **§ 255, 256.** Распространение волн в горизонтальной плоскости. Влияние местного возмущения. Влияние перемещающегося давления на возмущение в жидкости; формы волн (537). — **§ 256a, 256b.** Перемещающиеся возмущения другого вида. Корабельные волны. Волновое сопротивление. Влияние конечной глубины на форму волны (546). — **§ 257—259.** Стоячие волны в ограниченной массе воды. Распространение колебаний в канале треугольного сечения и в канале круглого сечения (550). — **§ 260, 261.** Продольные колебания; канал треугольного сечения; гребень волны (556). — **§ 262—264.** Колебание жидкого шара, линии тока. Сферический океан постоянной глубины (563). — **§ 265.** Капиллярность. Условия на поверхности (568). — **§ 266.** Капиллярные волны. Групповая скорость (570). — **§ 267, 268.** Волны под действием силы тяжести и капиллярности. Минимум скорости волны. Волны на поверхности раздела двух потоков (573). — **§ 269.** Волны, вызванные местным возмущением. Эффект движущегося источника возмущения; волны и рябь (578). — **§ 270—272.** Возмущение на поверхности потока; формальные исследования. Формы волны (580). — **§ 273, 274.** Колебания цилиндрического столба жидкости. Неустойчивость струи (588). — **§ 275.** Колебание жидкого шара и тора (591).

Глава X

Звуковые волны

§ 276—280. Плоские волны; скорость звука; энергия системы волн (593). — **§ 281—284.** Плоские волны конечной амплитуды; методы Римана и Earnshaw. Условия стоячих волн; исследования Ранкина. Волны уплотнения (600). — **§ 285, 286.** Сферические волны. Решение при начальных условиях (611). — **§ 287, 288.** Общее уравнение звуковых волн. Уравнение энергии (616). — **§ 289.** Простые гармонические колебания. Источники и диполи. Распространение энергии (620). — **§ 290.** Применение Гельмгольцем теоремы Грина. Потенциал скорости, выраженный через потенциалы источников, распределенных по поверхности. Формула Кирхгофа (623). — **§ 291.** Периодические возмущающие силы (627). — **§ 292.** Приложение сферических функций. Общее уравнение (629). — **§ 293.** Колебание воздуха в сферическом сосуде. Колебание сферического слоя (633). — **§ 294.** Распространение волн от сферической поверхности. Уменьшение амплитуды повторного движения (636). — **§ 295.** Влияние воздуха на колебания маятника, поправка на момент инерции шарика; затухания во времени (638). — **§ 296—298.** Рассеивание звуковых волн сферическим препятствием. Удары волн о подвижную сферу; случай синхроности (640). — **§ 299, 300.** Диффракция длинных волн плоским диском, отверстием в плоском экране и препятствием произвольной формы (647). — **§ 301.** Решение уравнения звука в сферических функциях. Условия на фронте волны (654). — **§ 302.** Звуковые волны в двух измерениях. Эффект перемещающегося источника; сравнение с одномерным и трехмерным случаем (657). — **§ 303, 304.** Простые гармонические колебания; решение в функциях Бесселя. Колебание цилиндра. Рассеивание волн цилиндрическим препятствием (660). — **§ 305.** Приближенная теория диффракции длинных волн в двух измерениях. Диффракция острой кромкой и щелью в тонком экране (665). — **§ 306, 307.** Отражение и передача звуковых волн решеткой (669). — **§ 308.** Диффракция полуплоскостью (674). — **§ 309, 310.** Вертикальное распространение волн в атмосфере; конвективный и изотермический закон (678) — **§ 311, 311a, 312.** Теории длинных атмосферных волн (685). — **§ 313.** Общее уравнение колебаний газа под действием постоянной силы (695). — **§ 314, 315.** Колебание атмосферы в невращающемся шаре (698). — **§ 316.** Атмосферные приливы во вращающемся шаре. Резонанс (699).

Глава XI

Вязкость

§ 317, 318. Теория диссипативных сил. Одна степень свободы; свободные и вынужденные колебания. Влияние трения на фазу колебаний (703). — **§ 319.** Приложение к приливам в экваториальном канале; запаздывание приливов и приливы, относящиеся к трению (707). — **§ 320.** Уравнения общей диссипативной системы; члены, зависящие от трения и вращения (710). — **§ 321.** Колебание диссипативной системы около положения абсолютного равновесия (711). — **§ 322.** Влияние гиростатических членов. Пример для двух степеней свободы; возмущающие силы длинного периода (713). — **§ 323—325.** Вязкость жидкости; особенность напряжений; формулы преобразований (716). — **§ 326, 327.** Напряжения как линейные функции скорости деформации. Коэфициент вязкости. Граничные условия; вопрос о скольжении (718). — **§ 328. 328a.** Динамические уравнения. Уравнения Гельмгольца; диффузия вихря (722). — **§ 329.** Рассеивание энергии в вязкой жидкости (725). — **§ 330, 330a.** Течение жидкости между двумя

параллельными плоскостями. Эксперименты Хеле-Шоу. Теория смазки; пример (728). — **§ 331, 332.** Течение в трубе круглого сечения. Закон Пуазейля; вопрос скольжения. Другие формы сечений (732). — **§ 333, 334.** Случаи установившегося движения. Практические ограничения (736). — **§ 334a.** Примеры неустановившегося движения. Диффузия вихря. Влияние поверхностных сил на глубину воды (739). — **§ 335, 336.** Медленное установившееся движение; общее решение в сферических функциях; формулы для напряжений (744). — **§ 337.** Прямолинейное движение шара; сопротивление; ограничение скорости; линии тока. Случай жидкого шара и твердого со скольжением (748). — **§ 338.** Метод Стокса; решение для функции тока (755). — **§ 339.** Установившееся движение эллипсоида (758). — **§ 340, 341.** Установившееся движение в поле постоянных сил (760). — **§ 342.** Установившееся движение сферы; критика Озина и решение уравнений (764). — **§ 343, 343a.** Установившиеся движения цилиндра; изучение методом Озина. Приложение к другим вопросам (772). — **§ 344.** Рассеивание энергии в установившемся движении. Теоремы Гельмгольца и Кортвега. Обобщение Рэлея. (776). — **§ 345—347.** Задачи периодического движения. Ламинарное движение; диффузия вихря. Колебания пластины. Периодические приливные силы; слабое влияние вязкости в быстром движении (779). — **§ 348—351.** Эффект вязкости на волны в воде. Создание волн ветром. Успокаивающее действие масла на волны (784). — **§ 352, 353.** Периодическое движение со сферическими границами; общее решение в сферических функциях (796). — **§ 354.** Приложения; ослабление движения в сферическом сосуде, крутильные колебания сферы, наполненной жидкостью (802). — **§ 355.** Влияние вязкости на колебания жидкого шара (805). — **§ 356.** Влияние на вращательные колебания сферы и на колебания маятника (808). — **§ 357.** Замечания к задачам в двух измерениях (811). — **§ 358.** Вязкость газов; диссипативная функция (813). — **§ 359, 360.** Уменьшение плоских звуковых волн от вязкости; сочетание вязкости с теплопроводностью (815). — **§ 360a.** Волны постоянного вида, вызванные вязкостью (819). — **§ 360b.** Поглощение звука пористыми стенками (821). — **§ 361.** Эффект вязкости на расхождение волн (824). — **§ 362, 363.** Влияние на рассеивание волн сферической неподвижной или свободной поверхности (829). — **§ 364.** Затухание звуковых волн в сферическом сосуде (835). — **§ 365, 366.** Турбулентное движение. Эксперименты Рейнольдса; критическая скорость воды в трубе; закон сопротивления. Вывод из теории размерности (837). — **§ 366a.** Движение между двумя вращающимися цилиндрами (842). — **§ 366b.** Коэфициент турбулентности; завихренность или молярная вязкость (843). — **§ 366c.** Атмосферная турбулентность; изменение ветра с высотой (845). — **§ 367, 368.** Теоретические исследования Рэлея и Кельвина (846). — **§ 369.** Статистический метод Рейнольдса (852). — **§ 370.** Сопротивление жидкости. Критика разрывных решений Кирхгофа и Рэлея (858). — **§ 370a.** Формула Кармана для сопротивления (859). — **§ 370b.** Поток с циркуляцией (861). — **§ 371.** Формулы размерности. Соотношения между моделью и натурой (862). — **§ 371a, b, c.** Пограничный слой. Замечания к теории крыла (864). — **§ 371d, e, f, g.** Влияние сжимаемости. Недостаточность линий тока в потоке с большими скоростями (873).

Глава XII

Вращающиеся массы жидкости

§ 372. Формы относительного равновесия. Общие теоремы (880). — **§ 373.** Формулы, относящиеся к притяжению эллипсоидами. Потенциальная энергия эллипсоидальных масс (884). — **§ 374.** Эллипсоид Маклорена. Соотношения между эксцентриситетом, угловой скоростью

и моментом количества движения; числовые таблицы (887). — **§ 375.** Эллипсоид Якоби. Вычисление формы эллипсоида равновесия с помощью рядов. Числовые результаты (890). — **§ 376.** Другие формы относительного равновесия. Вращающееся кольцо (893). — **§ 377.** Общая задача относительного равновесия; исследование Пуанкаре. Ряды, определяющие формы равновесия; предельные формы и разветвленные формы. Перемена устойчивости (897). — **§ 378—380.** Приложения к вращающимся системам. Вековая устойчивость эллипсоидов Маклорена и Якоби. Равновесие фигуры грушевидной формы (900). — **§ 381.** Малые колебания масс вращающихся эллипсоидов. Метод Пуанкаре. Ссылка (904). — **§ 382.** Исследование Дирихле, конечные гравитационные колебания жидкого эллипсоида при отсутствии вращения. Колебания вращающегося эллипсоида вращения (907). — **§ 383.** Эллипсоид Дедекинда. Невращающийся эллипсоид. Вращающийся эллиптический цилиндр (910). — **§ 384.** Свободные и вынужденные колебания вращающегося эллипсоида, наполненного жидкостью. Прецессия (913). — **§ 385.** Прецессия жидкого эллипсоида (918).

Именной указатель 922

Предметный указатель 925

ГЛАВА ПЕРВАЯ

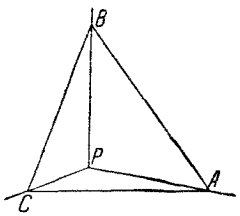
УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Все исследования этой книги основываются на предположении, что изучаемое вещество можно рассматривать практически непрерывным и однородным, т. е. что свойства наименьших частей, на которые мы можем мыслить вещество разделенным, являются такими же, как и свойства всей массы.

Основное свойство жидкости состоит в следующем: в напряженном состоянии жидкость не может быть в равновесии, если силы, действующие между двумя смежными частями жидкости, расположены наклонно к их общей поверхности. Гидростатика основывается на этом свойстве жидкости, и последнее подтверждается полным согласием между теорией и опытом. Однако непосредственное наблюдение показывает, что в движущихся жидкостях могут иметь место косо направленные напряжения. Пусть, например, сосуд, имеющий форму круглого цилиндра и содержащий воду (или другую жидкость), вращается около своей оси, направленной вертикально. Если угловая скорость сосуда постоянна, то мы очень скоро увидим, что жидкость с сосудом вращаются как одно твердое тело. Если затем привести сосуд в состояние покоя, то движение жидкости еще будет продолжаться некоторое время, становясь постепенно все более медленным, и, наконец, прекратится; мы увидим, что в течение этого процесса частицы жидкости, которые более удалены от оси, будут отставать от частиц, находящихся ближе к оси, и скорее потеряют свое движение. Это явление указывает на то, что между смежными частями жидкости возникают силы, одна из компонент которых направлена тангенциально к их общей поверхности. В самом деле, если бы силы взаимодействия между частицами жидкости были направлены нормально к их общей поверхности, то ясно, что момент количества движения относительно оси сосуда каждой части жидкости, ограниченной поверхностью вращения около этой оси, был бы постоянен. Далее мы заключаем, что тангенциальные силы отсутствуют, пока жидкость движется как твердое тело; они появляются только тогда, когда имеет место изменение формы частиц жидкости и эти силы направлены так, что они стремятся помешать изменению формы.

§ 2. Однако принято сначала совершенно опускать из рассмотрения тангенциальные напряжения. Их действие во многих практических случаях очень мало и, независимо от этого, целесообразно расчленить довольно значительные трудности нашей задачи путем рассмотрения сначала лишь действий одних нормальных напряжений. В соответствии с этим дальнейшие исследования тангенциальных напряжений мы откладываем до XI главы.

Если напряжение, приложенное к какому-нибудь элементу поверхности, проходящему через точку P жидкости, направлено нормально к этому элементу, то величина этого напряжения (на единицу площади) не зависит от направления этого элемента поверхности. Докажем эту теорему сейчас, чтобы потом иметь возможность на нее ссылаться. Проведем через точку P три взаимно перпендикулярные прямые PA, PB, PC; пусть плоскость, лежащая бесконечно близко к точке P и имеющая с указанными прямыми направляющие косинусы l, m, n, пересекает эти прямые в точках A, B, C. Пусть будут p, p_1, p_2, p_3 напряжения [1]) для граней ABC, PBC, PCA, PAB тетраедра $PABC$. Если мы обозначим площадь первого треугольника через Δ, то площади остальных треугольников будут $l\Delta$, $m\Delta$, $n\Delta$. Отсюда, составляя уравнение движения тетраедра параллельно PA, получим



Фиг. 1.

$$p_1 \cdot l\Delta = pl \cdot \Delta;$$

мы пренебрегли здесь как членами, представляющими изменение количества движения, так и компонентами внешних сил, так как эти величины пропорциональны массе тетраедра и потому являются бесконечно малыми третьего порядка, тогда как оставленные нами члены суть второго порядка малости. Отсюда следует, что $p = p_1$ и аналогично $p = p_2 = p_3$, что и доказывает нашу теорему.

§ 3. Уравнения движения жидкости можно представить в двух различных формах соответственно двум способам, которые можно предложить при исследовании движения жидкой массы под действием данных сил и при определенных граничных условиях. Именно, или мы можем сделать предметом нашего исследования определение для любого момента времени скорости, давления и плотности во всех точках пространства, наполненного жидкостью, или же мы можем стремиться определить историю каждой отдельной жидкой частицы. Уравнения, которые получаются этими двумя способами, называются

---

[1]) Напряжения считаются положительными в случае давления и отрицательными, если имеет место растяжение. Однако большинство жидкостей при обыкновенных условиях может испытывать только очень малое растяжение, так что p почти всегда положительно.

обыкновенно, в согласии с немецкими математиками, как эйлерова и лагранжева формы уравнений гидродинамики, хотя на самом деле обе формы принадлежат Эйлеру [1]).

Уравнения Эйлера

§ 4. Пусть будут u, v, w компоненты скорости в точке (x, y, z) в момент t, параллельные осям координат. Таким образом эти компоненты суть функции независимых переменных x, y, z, t. Для каждого частного значения t количества u, v, w определяют движение в этот момент для всех точек пространства, наполненного жидкостью; напротив, для определенных значений переменных x, y, z количества u, v, w дают историю того, что происходит в этом определенном месте.

В большинстве случаев мы будем предполагать, что не только u, v, w суть конечные непрерывные функции от x, y, z, но что и их производные по координатам первого порядка $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}\right.$ и т. д.$\left.\right)$ также всюду конечны [2]); мы будем понимать под непрерывным движением такое движение, которое подчинено этим ограничениям. Исключения, если они встретятся, потребуют особых исследований. При определенном таким образом непрерывном движении относительная скорость двух смежных частиц P и P' всегда бесконечно мала, так что отрезок PP' остается всегда величиной одного и того же порядка. Отсюда следует, что если мы предположим, что вокруг P расположена малая замкнутая поверхность, которая движется вместе с жидкостью, то эта поверхность будет содержать внутри себя постоянно одно и то же вещество, и всякая поверхность, которая движется вместе с жидкостью, разделяет всегда и полностью массу жидкости на две части, расположенные по обе стороны этой поверхности.

§ 5. Значения u, v, w для последовательных значений t дают некоторым образом картину отдельных состояний движения, но они, однако, не дают прямой возможности установить тождество каждой частицы.

Чтобы определить изменение какой-нибудь функции $F(x, y, z, t)$, обусловливаемое движением частиц, заметим, что частица, которая в

---

[1]) Euler, Principes généraux du mouvement des fluides, Hist. de l'Acad. de Berlin, 1755. De principiis motus fluidorum, Novi Comm. Acad. Petrop., XIV, I (1759). Лагранж опубликовал три сочинения об уравнениях движения; первое в связи с принципом наименьшего действия в Miscellanea Taurinensia, II (1760) [Oeuvres, Paris, 1867—1892, I]; второе — в своем Mémoire sur la Théorie du Mouvement des Fluides, Nouv. mém. de l'Acad. de Berlin, 1781 [Oeuvres IV; наконец, третье — в Mécanique Analytique. В этом последнем изложении он начинает со второй формы уравнений (§ 14 в настоящей книге), но переходит сейчас же к обозначениям Эйлера.

[2]) Полезно заметить, принимая во внимание дальнейшие исследования, приведенные под заглавием „Вихревое движение", что эти производные не обязательно должны предполагаться непрерывными.

момент t была в положении (x, y, z), в момент $t+\delta t$ будет находиться в положении $(x+u\,\delta t,\ y+v\,\delta t,\ z+w\,\delta t)$, так что соответствующее значение F будет равно

$$F(x+u\,\delta t,\ y+v\,\delta t,\ z+w\,\delta t,\ t+\delta t) = \\ = F + u\,\delta t\frac{\partial F}{\partial x} + v\,\delta t\ \frac{\partial F}{\partial y} + w\,\delta t\ \frac{\partial F}{\partial z} + \delta t\ \frac{\partial F}{\partial t}\ .$$

Если, следуя Стоксу, мы введем символ $\frac{D}{Dt}$ для обозначения диференцирования, вытекающего из рассмотрения движения любой индивидуальной частицы жидкости, то новое значение F выразится через $F+\frac{DF}{Dt}\delta t$, где

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z}\ . \qquad (1)$$

§ 6. Чтобы получить уравнения движения, обозначим через p давление, через ϱ плотность, через X, Y, Z компоненты внешних сил, отнесенные к единице массы, для точки (x, y, z) в момент t. Рассмотрим элемент объема, имеющий центр в точке (x, y, z), ребра δx, δy, δz которого параллельны прямоугольным осям координат. Величина, на которую возрастает компонента по оси x количества движения этого элемента в единицу времени, равна $\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\frac{Du}{Dt}$; эта величина должна равняться проекции на ось x сил, действующих на этот элемент. Проекция на ось x внешних сил равна $\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,X$. Давление на грань, параллельную плоскости yz, лежащую ближе к началу координат, равно

$$\left(p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\right)\delta y\,\delta z\ ^{1}).$$

Давление же на противолежащую грань равно

$$\left(p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\right)\delta y\,\delta z.$$

Разность этих давлений равна результирующему давлению

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\,\delta y\,\delta z$$

в направлении положительной оси x. Давления же на остальные грани перпендикулярны к оси x. Таким образом мы имеем

$$\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\ \frac{Du}{Dt} = \varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,X - \frac{\partial p}{\partial x}\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

---

[1]) Легко видеть, что, согласно теореме о среднем значении, среднее давление на какую-нибудь боковую грань элемента можно положить равным давлению в центре соответствующей грани.

Вставляя значение для $\frac{Du}{Dt}$ из выражения (1) и составляя аналогичные уравнения относительно остальных осей, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

§ 7. К этим динамическим уравнениям мы должны прежде всего присоединить определенное кинематическое соотношение между u, v, w, ϱ, которое получается следующим образом.

Обозначая через Q объем движущегося элемента жидкости, согласно закону сохранения массы, мы будем иметь

$$\frac{D(\varrho Q)}{Dt}=0,$$

или

$$\frac{1}{\varrho}\frac{D\varrho}{Dt}+\frac{1}{Q}\frac{DQ}{Dt}=0. \qquad (1)$$

Чтобы вычислить значение $\frac{1}{Q}\frac{DQ}{Dt}$, рассмотрим элемент, заполняющий в момент t параллелепипед $\delta x\,\delta y\,\delta z$, вершина P которого лежит в точке (x, y, z), а ребра PL, PM, PN параллельны координатным осям. В момент $t+\delta t$ рассматриваемый элемент образует косой параллелепипед, и так как скорости частицы L относительно частицы P равны

$$\frac{\partial u}{\partial x}\delta x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}\delta x,\quad \frac{\partial w}{\partial x}\delta x,$$

то по прошествии времени δt проекции ребра PL на координатные оси будут равны

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\delta t\right)\delta x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}\delta t\,\delta x,\quad \frac{\partial w}{\partial x}\delta t\,\delta x.$$

Пренебрегая членами высшего порядка относительно δt, мы найдем, что длина этого ребра будет равна

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\delta t\right)\delta x;$$

аналогично находим и остальные ребра. Так как углы параллелепипеда только бесконечно мало отличаются от прямых углов, то объем его, если мы пренебрежем членами высшего порядка относительно δt, выразится произведением трех ребер, т. е. мы получим

$$Q+\frac{DQ}{Dt}\delta t=\left\{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta t\right\}\delta x\,\delta y\,\delta z,$$

или

$$\frac{1}{Q}\frac{DQ}{Dt}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}. \qquad (2)$$

Следовательно, из (1) мы находим

$$\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \tag{3}$$

Это уравнение называется уравнением неразрывности.

Выражение

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{4}$$

которое, как мы видим, измеряет увеличение единицы объема жидкости в единицу времени в точке (x, y, z), обыкновенно называется объемным расширением в этой точке. С более общей точки зрения выражение (4) называется дивергенцией (расхождением) вектора $u, v, w)$; часто оно обозначается следующим образом:

$$\operatorname{div}(u, v, w).$$

Предыдущее рассуждение в существенном принадлежит Эйлеру [1]). Другой, теперь более употребительный метод вывода уравнения неразрывности состоит в том, что вместо того, чтобы следовать, как выше, за движением элемента жидкости, рассматривают элемент объема $\delta x\, \delta y\, \delta z$ и исследуют, как изменяется заключенная в нем масса вследствие протекания жидкости через поверхность этого элемента объема. Если центр элемента находится в точке (x, y, z), то масса, которая входит за единицу времени в рассматриваемый элемент через его грань, ближайшую к началу координат и параллельную плоскости yz, равна

$$\left(\varrho u - \frac{1}{2}\frac{\partial \varrho u}{\partial x}\delta x\right)\delta y\, \delta z,$$

а масса, которая выходит через противоположную грань, равна

$$\left(\varrho u + \frac{1}{2}\frac{\partial \varrho u}{\partial x}\delta x\right)\delta y\, \delta z.$$

Следовательно, при движении жидкости через обе эти грани, получается в единицу времени внутри элемента объема излишек жидкости, равный

$$-\frac{\partial \varrho u}{\partial x}\delta x\, \delta y\, \delta z.$$

Подсчитывая таким же образом результат протекания жидкости через остальные грани, мы получим для общего излишка массы в объеме $\delta x\, \delta y\, \delta z$ за единицу времени выражение

$$-\left(\frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v}{\partial y} + \frac{\partial \varrho w}{\partial z}\right)\delta x\, \delta y\, \delta z.$$

Так как изменение количества вещества в некоторой области может обусловливаться только протеканием вещества через границу области,

---

[1]) См. прим. на стр. 15.

то предыдущее выражение должно равняться

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\, \delta x\, \delta y\, \delta z).$$

Отсюда получаем уравнение неразрывности в следующем виде:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v}{\partial y} + \frac{\partial \varrho w}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

§ 8. Рассмотрим теперь некоторые физические свойства жидкости, поскольку они влияют на величины, входящие в наши уравнения.

Для несжимаемой, сохраняющей постоянный объем, или капельной, жидкости мы имеем $\frac{D\varrho}{Dt} = 0$. В этом случае уравнение неразрывности принимает простой вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

При этом не предполагается, что жидкость имеет однородную (всюду одинаковую) плотность, хотя это, конечно, в дальнейшем есть наиболее важный случай.

Если мы желаем принять во внимание малую сжимаемость действительных капельных жидкостей, то должны взять уравнение вида

$$p = \varkappa \frac{(\varrho - \varrho_0)}{\varrho_0}, \tag{2}$$

или

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = 1 + \frac{p}{\varkappa}, \tag{3}$$

где $\varkappa$ обозначает так называемую объемную упругость. В случае газа, температура которого постоянна в пространстве и времени, имеет место изотермическое соотношение

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0}, \tag{4}$$

где p_0, ϱ_0 есть некоторая пара соответствующих друг другу значений для рассматриваемой температуры.

Однако во многих случаях движения газа его температура не остается постоянной, но повышается или понижается для каждого элемента, смотря по тому, сжимается газ или расширяется. Если этот процесс происходит так быстро, что мы можем пренебречь излишком или потерей тепла, происходящими вследствие проводимости и излучения, то мы получаем адиабатическое соотношение

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\gamma}, \tag{5}$$

где p_0 и ϱ_0 есть некоторая пара соответственных значений для рассматриваемого элемента. Постоянная γ есть отношение обеих удельных теплоемкостей газа; для атмосферного воздуха и некоторых других газов ее значение равно 1,408.

§ 9. На пограничных поверхностях жидкости (если они имеются) уравнение неразрывности должно быть заменено специальным условием на поверхности. Так, на *неподвижной* пограничной поверхности проекция скорости на нормаль к поверхности должна равняться нулю, т. е. если l, m, n суть направляющие косинусы нормали к поверхности, то должно быть

$$lu+mv+nw=0. \tag{1}$$

Напротив, на поверхности разрыва, т. е. на поверхности, на которой значения u, v, w меняются скачками при переходе с одной стороны поверхности на другую, мы должны иметь

$$l(u_1-u_2)+m(v_1-v_2)+n(w_1-w_2)=0, \tag{2}$$

причем индексы служат для отличия количеств на обеих сторонах поверхности. Такое же соотношение должно иметь место и на поверхности раздела между жидкостью и движущимся твердым телом.

Приведенные выше случаи суть частные случаи следующего общего условия на поверхности (граничного условия). Если $F(x, y, z, t)=0$ есть уравнение граничной поверхности, то для всякой точки этой поверхности имеем

$$\frac{DF}{Dt}=0. \tag{3}$$

В самом деле, относительная скорость каждой частицы, лежащей на поверхности, должна быть направлена в точности тангенциально к поверхности (или равна нулю); в противном случае через поверхность имел бы место конечный поток жидкости. Отсюда следует, что скорость изменения F в любой момент времени для всякой частицы поверхности должна равняться нулю.

Более полное доказательство, данное Кельвином [1]), состоит в следующем. Чтобы найти компоненту скорости ($\dot{\nu}$) поверхности $F(x, y, z, t)=0$, нормальную к этой поверхности, рассмотрим уравнение

$$F(x+l\dot{\nu}\,\delta t,\ y+m\dot{\nu}\,\delta t,\ z+n\dot{\nu}\,\delta t,\ t+\delta t)=0,$$

где l, m, n суть направляющие косинусы нормали в любой точке (x, y, z) к этой поверхности. Отсюда следует

$$\dot{\nu}\left(l\frac{\partial F}{\partial x}+m\frac{\partial F}{\partial y}+n\frac{\partial F}{\partial z}\right)+\frac{\partial F}{\partial t}=0.$$

Так как

$$l=\frac{\partial F}{\partial x}:R,\quad m=\frac{\partial F}{\partial y}:R,\quad n=\frac{\partial F}{\partial z}:R,$$

где

$$R=\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

---

[1]) Thomson W., Notes on Hydrodynamics, Cambr. and Dub. Math. Journ., Febr. 1848 (Mathematical and Physical Papers. Cambridge, 1882. I, 83).

то мы имеем

$$\dot{\nu} = \frac{1}{R}\frac{\partial F}{\partial t}. \tag{4}$$

Так как во всякой точке поверхности должно быть

$$\dot{\nu} = lu + mv + nw,$$

то, подставляя сюда вышеприведенные значения для l, m, n, мы и получим уравнение (3).

Уравнение с частными производными (3) удовлетворяется на всякой поверхности, движущейся вместе с жидкостью. Это вытекает непосредственно из смысла оператора $\frac{D}{Dt}$. Возникает вопрос, существует ли обязательно обратная теорема, т. е. должна ли движущаяся поверхность, уравнение которой $F=0$ удовлетворяет условию (3), всегда состоять из тех же самых частиц. Рассмотрим такую поверхность и отметим некоторую частицу P, лежащую на ней в момент t. Из уравнения (3) следует, что скорость, с которой P удаляется от поверхности, в момент t равна нулю, и легко видеть, что при *непрерывном движении* (согласно определению в § 4) компонента скорости частицы, находящейся на бесконечно малом расстоянии ζ от поверхности, взятая по нормали к движущейся поверхности, будет порядка ζ, т. е. что она равна $G\zeta$, где G конечно. Поэтому уравнение движения частицы P относительно поверхности может быть представлено следующим образом:

$$\frac{D\zeta}{Dt} = G\zeta.$$

Отсюда следует, что $\ln\zeta$ растет с конечной скоростью ко времени, и так как он в начальный момент, когда $\zeta=0$, равен отрицательной бесконечности, то он остается таким всегда, т. е. ζ остается для частицы P постоянно равной нулю.

Этот же результат следует из свойства решения уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \tag{5}$$

рассматриваемого, как уравнение с частными производными для F *). Вспомогательная система обыкновенных диференциальных уравнений для уравнения (5) будет

$$dt = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}, \tag{6}$$

где x, y, z рассматриваются как функции независимого переменного t. Очевидно, что это суть уравнения, из которых определяются траектории частиц; интегралы уравнений (6) можно представить в виде

$$x = f_1(a, b, c, t); \quad y = f_2(a, b, c, t); \quad z = f_3(a, b, c, t), \tag{7}$$

причем произвольные постоянные a, b, c суть количества, определяющие частицу; например, эти постоянные могут изображать начальные координаты частицы. Общее решение (5) получается исключением a, b, c из (7) и

$$F = \psi(a, b, c), \tag{8}$$

где ψ обозначает произвольную функцию. Это показывает, что частица, которая лежала однажды на поверхности $F=0$, остается на ней постоянно в течение всего движения.

*) Lagrange, Oeuvres, IV, стр. 706.

Уравнение энергии

§ 10. В большинстве случаев, которые мы будем изучать, внешние силы имеют потенциал, т. е. будет

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ Y &= -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ Z &= -\frac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Физический смысл Ω состоит в том, что функция Ω представляет потенциальную энергию единицы массы в точке (x, y, z) сил, действующих на расстоянии. Предварительно достаточно рассмотреть случай, когда поле внешних сил постоянно относительно времени, т. е. когда

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0.$$

Умножая уравнения (2) из § 6 соответственно на u, v, w и складывая, получим результат, который можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\varrho \frac{D}{Dt}(u^2+v^2+w^2)+\varrho \frac{D\Omega}{Dt} = -\left(u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right).$$

Если мы умножим это уравнение на $\delta x\, \delta y\, \delta z$ и проинтегрируем по некоторой области, то найдем

$$\frac{D}{Dt}(T+V) = -\iiint \left(u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz, \tag{2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\iiint \varrho\,(u^2+v^2+w^2)\, dx\, dy\, dz, \\ V &= \iiint \Omega\varrho\, dx\, dy\, dz, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

т. е. T и V обозначают кинетическую энергию и происходящую от поля внешних сил потенциальную энергию для жидкости, которая в данный момент наполняет рассматриваемую область.

Трехкратный интеграл в правой части (2) можно преобразовать при помощи приема, к которому мы часто будем прибегать в наших исследованиях. Именно, интегрируя по частям, мы получим

$$\iiint u\frac{\partial p}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint [pu]\, dy\, dz - \iiint p\frac{\partial u}{\partial x}\, dx\, dy\, dz,$$

где $[pu]$ означает, что значения pu должны быть взяты, и притом с надлежащими знаками, в точках, в которых граница области пересекается прямой, параллельной оси x.

Обозначая через l, m, n направляющие косинусы *внутренней* нормали к элементу δS границы области, имеем

$$\delta y\, \delta z = \pm l\, \delta S,$$

причем знаки меняются в следующих друг за другом только что рассмотренных точках пересечения границы области с прямой, параллельной оси x. Мы находим отсюда

$$\iint [pu]\, dy\, dz = -\iint pu\, l\, dS,$$

где интегрирование надо распространить на всю ограничивающую поверхность. Если мы преобразуем остальные члены подобным же образом, то получим

$$\frac{D}{Dt}(T+V) = \iint p(lu+mv+nw)\, dS + \\ + \iiint p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz. \qquad (4)$$

В случае несжимаемой жидкости это уравнение принимает вид

$$\frac{D}{Dt}(T+V) = \iint (lu+mv+nw)\, p\, dS. \qquad (5)$$

Так как $lu+mv+nw$ обозначает скорость частицы жидкости в направлении нормали, то интеграл в правой части выражает работу, которую производит давление $p\,\delta S$, направленное снаружи на различные элементы δS ограничивающей поверхности. Поэтому общий прирост энергии как кинетической, так и потенциальной для какой-нибудь части жидкости равен работе, которую производит давление на поверхность, ограничивающую эту часть жидкости.

В частном случае, когда жидкость со всех сторон ограничена твердыми неподвижными стенками, мы имеем на границе

$$lu+mv+nw = 0,$$

и отсюда следует, что

$$T+V = \text{const}. \qquad (6)$$

Подобное истолкование можно дать и более общему уравнению (4), если мы примем, что p есть функция только от ϱ. Если мы положим

$$E = -\int p\, d\left(\frac{1}{\varrho}\right), \qquad (7)$$

то E определяет меру для работы, которую единица массы жидкости производит против внешнего давления, когда она при данном соотношении между p и ϱ переходит от рассматриваемого объема к определенному первоначальному объему. Если, например, единица массы заключена в цилиндре со скользящим поршнем, поверхность которого равна A, и поршень выдвинут на отрезок δx, то произведенная при этом работа будет равна $pA\,\delta x$, где множитель $A\,\delta x$ обозначает приращение объема, т. е. приращение ϱ^{-1}.

Для случая адиабатического изменения состояния мы получим:

$$E = \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{p}{\varrho}-\frac{p_0}{\varrho_0}\right). \qquad (8)$$

Количество E можно назвать внутренней энергией жидкости, приходящейся на единицу массы. Обращаясь к данному в § 7 истолкованию выражения

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz},$$

мы видим, что объемный интеграл в (4) измеряет потерю внутренней энергии, которую испытывают различные элементы при расширении [1]); следовательно, этот интеграл равен

$$-\frac{DW}{Dt},$$

где

$$W=\iiint E\varrho\,dx\,dy\,dz. \tag{9}$$

Следовательно, мы имеем

$$\frac{D}{Dt}(T+V+W)=\iint p(lu+mv+nw)\,dS, \tag{10}$$

т. е. полная энергия, которая слагается в этом случае частью из кинетической, частью из потенциальной по отношению к не зависящему от времени силовому полю, частью из внутренней энергии, изменяется со временем в той мере, в какой производится работа внешнего давления на ограничивающей поверхности.

При изотермическом законе мы имели бы

$$E=c^2\ln\frac{\varrho}{\varrho_0}, \tag{11}$$

где $c^2=\frac{p_0}{\varrho_0}$. Это выражение представляет свободную энергию единицы массы. При таком определении E мы получим уравнение в той же форме, что и уравнение (10), но только смысл его будет отличен.

Перенос количества движения

§ 10а. Пусть в момент времени t жидкость занимала некоторую область. Область, которую займет эта жидкость по прошествии времени δt, будет отличаться от первоначальной на поверхностный слой толщины (положительной или отрицательной)

$$(lu+mv+nw)\,\delta t,$$

где (l, m, n) — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности. Отсюда легко видеть, что мера возрастания количества движения выделенной части жидкости в момент t равна мере возрастания

---

[1]) Или иначе:

$$p\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)\delta x\,\delta y\,\delta z=-p\cdot\frac{1}{\varrho}\frac{D\varrho}{Dt}\cdot\delta x\,\delta y\,\delta z=$$
$$=p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z=-\frac{DE}{Dt}\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

количества движения, содержащегося в неизменяемой области, сложенной с перенесенным количеством движения наружу через границу.

Рассматривая проекцию количества движения на ось x, мы будем иметь

$$\iiint \frac{Du}{Dt}\varrho\,dx\,dy\,dz = \iiint \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz =$$
$$= \iiint \varrho\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dy\,dz + \iint \varrho u\,(lu+mv+nw)\,dS -$$
$$- \iiint u\left(\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz =$$
$$= \frac{d}{dt}\iiint \varrho u\,dx\,dy\,dz + \iint \varrho u\,(lu+mv+nw)\,dS\ldots, \qquad (1)$$

при этом мы использовали соотношение (5) § 7.

В случае установившегося движения (§ 21) первый член правой части (1) обращается в нуль, и поэтому *мера* возрастания количества движения какой-либо части жидкости равна перенесенному количеству движения наружу через ее границу.

Обратно, если мы применим данную теорему к жидкости, содержащейся в какой-либо момент в прямоугольном параллелепипеде $\delta x\,\delta y\,\delta z$, то мы можем воспроизвести уравнения движения § 6.

Мгновенно вызванное движение

§ 11. Если на жидкость в некоторый момент времени действуют мгновенные силы или если граничные условия внезапно изменяются, то может иметь место внезапное изменение движения. Последнее обстоятельство, может, например, наступить, если некоторое погруженное в жидкость тело внезапно привести в движение.

Пусть будут ϱ — плотность, u, v, w — компоненты скорости непосредственно перед ударом, u', v', w' — непосредственно после удара, X', Y', Z' — компоненты внешних импульсивных сил на единицу массы, ω — импульсивное давление в точке (x, y, z). Изменение количества движения, параллельного оси x, для элемента, определенного в § 6, равно

$$\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,(u'-u);$$

компонента внешних импульсивных сил, параллельная оси x, равна

$$\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,X',$$

и результирующее импульсивное давление в том же направлении равно

$$-\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial x}\,\delta x\,\delta y\,\delta z.$$

Так как удар можно рассматривать как бесконечно большую силу, действующую в течение бесконечно малого промежутка времени (например τ), то мы можем пренебречь действием всех конечных сил в течение этого промежутка времени.

Поэтому мы имеем

$$\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,(u'-u)=\varrho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,X'-\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x}\,\delta x\,\delta y\,\delta z,$$

или

$$\left.\begin{aligned} u'-u&=X'-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x},\\ v'-v&=Y'-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y},\\ w'-w&=Z'-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial z}. \end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

и аналогично:

Эти уравнения можно получить также из уравнений (2), данных в § 6, если мы умножим эти уравнения на δt, проинтегрируем их между пределами 0 и τ, сделаем подстановку

$$X'=\int_0^\tau X\,dt,\quad Y'=\int_0^\tau Y\,dt,\quad Z'=\int_0^\tau Z\,dt,\quad \widetilde{\omega}=\int_0^\tau p\,dt$$

и затем положим τ бесконечно малым.

В несжимаемой жидкости мгновенное изменение движения может быть вызвано одними импульсивными давлениями даже тогда, когда на жидкую массу не действуют внешние импульсивные силы. В этом случае мы имеем

$$X'=Y'=Z'=0,$$

так что

$$\left.\begin{aligned} u'-u&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x},\\ v'-v&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y},\\ w'-w&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\omega}{\partial z}. \end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Если мы продиференцируем эти уравнения соответственно по x, y, z, затем сложим результаты и предположим далее, что плотность постоянна (относительно x, y, z), то найдем согласно § 8 (1), что

$$\frac{\partial^2\widetilde{\omega}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\widetilde{\omega}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\widetilde{\omega}}{\partial z^2}=0.$$

Отсюда ясно, что задача состоит в том, чтобы в каждом данном случае определить значение $\widetilde{\omega}$, удовлетворяющее этому уравнению, при специальных условиях на границе [1]); тогда внезапное изменение движения определится из уравнений (2).

---

[1]) В главе III мы увидим, что значение $\tilde{\omega}$ определится отсюда вплоть до аддитивной константы.

Уравнения, отнесенные к подвижной системе координат

§ 12. В некоторых задачах иногда бывает полезно пользоваться прямоугольной системой координат, которая сама находится в движении. Движение самой системы координат можно характеризовать при помощи компонент скорости начала координат **u**, **v**, **w** и компонент **p**, **q**, **r** вращения относительно мгновенного положения осей. Если u, v, w суть компоненты скорости частицы жидкости в точке (x, y, z), то скорость изменения ее координат относительно подвижной системы осей координат выражается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Dx}{Dt} &= u - \mathbf{u} + \mathbf{r}y - \mathbf{q}z, \\ \frac{Dy}{Dt} &= v - \mathbf{v} + \mathbf{p}z - \mathbf{r}x, \\ \frac{Dz}{Dt} &= w - \mathbf{w} + \mathbf{q}x - \mathbf{p}y. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

По истечении времени δt компоненты скорости частицы, параллельные новым положениям осей координат, будут равны

$$u + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{Dz}{Dt}\right)\delta t \quad \text{и т. д.} \tag{2}$$

Чтобы найти компоненты ускорения, мы должны найти проекции скорости по истечении времени δt на направления, параллельные первоначальным направлениям осей координат, по приемам, изложенным в учебниках Динамики.

Отсюда мы получим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \mathbf{r}v + \mathbf{q}w + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{Dz}{Dt}, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} - \mathbf{p}w + \mathbf{r}u + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{Dz}{Dt}, \\ &\frac{\partial w}{\partial t} - \mathbf{q}u + \mathbf{p}v + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{Dx}{Dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{Dy}{Dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{Dz}{Dt}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Чтобы получить искомые уравнения движения, надо заменить левые части формул (21) § 6 [1]) этими значениями.

Общее уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho\frac{Dx}{Dt}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho\frac{Dy}{Dt}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho\frac{Dz}{Dt}\right) = 0 \tag{4}$$

и приводится для несжимаемых жидкостей к прежнему виду

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

---

[1]) Greenhill, On the General Motion of a Liquid Ellipsoid. Proc. Camb. Soc., IV. 4 (1880).

Уравнения Лагранжа

§ 13. Пусть будут a, b, c начальные координаты некоторой частицы жидкости, x, y, z — ее координаты в момент t. Мы рассматриваем здесь x, y, z как функции независимых переменных a, b, c, t. Их значения как функций этих величин дают историю каждой частицы жидкости. В момент t компоненты скорости частицы (a, b, c), параллельные осям координат, суть

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial t},$$

и компоненты ускорения по тем же направлениям будут равны

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Пусть будут p давление и ϱ плотность в области этой частицы в момент t, X, Y, Z — компоненты внешних сил, действующих на единицу массы. Рассматривая движение жидкой массы, занимающей в момент t бесконечно малый элемент пространства $\delta x\, \delta y\, \delta z$, мы при помощи рассуждения, аналогичного рассуждению § 6, получим

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Эти уравнения содержат производные по x, y, z, тогда как независимые переменные суть a, b, c, t. Чтобы исключить эти производные, умножим сначала приведенные уравнения соответственно на $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial z}{\partial a}$ и сложим, затем умножим на $\frac{\partial x}{\partial b}$, $\frac{\partial y}{\partial b}$, $\frac{\partial z}{\partial b}$ и сложим и, наконец, умножим соответственно на $\frac{\partial x}{\partial c}$, $\frac{\partial y}{\partial c}$, $\frac{\partial z}{\partial c}$ и сложим. Тогда мы получим три уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial b} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial c} = 0.$$

Эти уравнения представляют лагранжеву форму уравнений движения.

§ 14. Чтобы определить, какой вид примет уравнение неразрывности относительно наших теперешних переменных, рассмотрим элемент жидкости, который первоначально наполнял прямоугольный параллелепипед с центром в (a, b, c) и с ребрами δa, δb, δc, параллельными осям координат. В момент t этот самый элемент образует

косой параллелепипед. Его центр имеет теперь координаты x, y, z, и проекции его ребер на оси координат будут соответственно равны

$$\frac{\partial x}{\partial a}\delta a,\ \frac{\partial y}{\partial a}\delta a,\ \frac{\partial z}{\partial a}\delta a,$$
$$\frac{\partial x}{\partial b}\delta b,\ \frac{\partial y}{\partial b}\delta b,\ \frac{\partial z}{\partial b}\delta b,$$
$$\frac{\partial x}{\partial c}\delta c,\ \frac{\partial y}{\partial c}\delta c,\ \frac{\partial z}{\partial c}\delta c.$$

Отсюда находим для объема этого косого параллелепипеда выражение

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} \delta a\,\delta b\,\delta c,$$

или, согласно часто употребляемому обозначению:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)}\delta a\,\delta b\,\delta c.$$

Так как масса элемента остается неизменной, то должно быть

$$\varrho\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \varrho_0, \tag{1}$$

где ϱ_0 обозначает первоначальную плотность в точке (a, b, c).

В случае несжимаемой жидкости $\varrho = \varrho_0$ и (1) принимает вид

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = 1. \tag{2}$$

Преобразование Вебера

§ 15. Если, как указано в § 10, силы X, Y, Z имеют потенциал Ω, то уравнения движения § 13 можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{\partial\Omega}{\partial a} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a} \text{ и т. д.}$$

Проинтегрируем эти уравнения по t между пределами 0 и t. Заметим, что

$$\int_0^t \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial a}\,dt = \left[\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial a}\right]_0^t - \int_0^t \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t}\,dt =$$
$$= \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial a} - u_0 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\int_0^t \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 dt,$$

где u_0 есть начальное значение компоненты скорости частицы (a, b, c)

в направлении оси x. Полагая

$$\chi = \int_0^t \left[\int \frac{dp}{\varrho} + \Omega - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \right\} \right] dt, \tag{1}$$

имеем [1])

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial a} - u_0 &= -\frac{\partial \chi}{\partial a}, \\ \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial b} - v_0 &= -\frac{\partial \chi}{\partial b}, \\ \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial b} - w_0 &= -\frac{\partial \chi}{\partial c}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эти три уравнения вместе с уравнением

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \int \frac{dp}{\varrho} + \Omega - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \right\} \tag{3}$$

и уравнением неразрывности суть уравнения с частными производными, которым должны удовлетворять пять неизвестных величин x, y, z, p, χ; при этом мы считаем, что ϱ уже исключено при помощи одного из соотношений § 8.

Начальные условия, которым надлежит удовлетворить, суть

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c, \quad \chi = 0.$$

§ 16. Необходимо отметить, что количества a, b, c не должны обязательно обозначать начальные координаты частицы; они могут обозначать какие-нибудь три количества, которые служат для определения частицы и меняются непрерывно от частицы к частице. Если мы обобщим таким образом смысл a, b, c, то форма уравнений движения в § 13 не изменится; чтобы найти форму, которую принимает уравнение неразрывности, обозначим через x_0, y_0, z_0 координаты начального положения частицы, которой соответствуют a, b, c. Начальный объем параллелепипеда, центр которого лежит в точке (x_0, y_0, z_0) и ребра которого соответствуют вариациям δa, δb, δc параметров a, b, c, равен

$$\frac{\partial (x_0, y_0, z_0)}{\partial (a, b, c)} \delta a \, \delta b \, \delta c,$$

так что мы имеем

$$\varrho \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (a, b, c)} = \varrho_0 \frac{\partial (x_0, y_0, z_0)}{\partial (a, b, c)}, \tag{1}$$

или — для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (a, b, c)} = \frac{\partial (x_0, y_0, z_0)}{\partial (a, b, c)}. \tag{2}$$

---

[1]) Weber, H., Über eine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, Crelle, LXVIII (1868). В (1) предполагается, что плотность ϱ, если она непостоянна, есть функция только p.

Уравнения в полярных координатах

§ 16a. В предшествующих рассуждениях были использованы декартовы координаты, которые обычно более удобны при доказательствах общих теорем. Но при разрешении некоторых частных задач оказывается удобнее пользоваться полярными координатами. Поэтому мы, следуя плану Эйлера, здесь для справок приводим соответственные формулы.

В полярных координатах на плоскости мы можем через u и v обозначить соответственно радиальную и трансверсальную скорости в точке (r, θ) в момент t. Так как радиус-вектор частицы вращается со скоростью $\frac{v}{r}$, то согласно обычной теории вращения осей получим для компонент ускорения следующие выражения:

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{v}{r}v, \quad \frac{Dv}{Dt} + \frac{v}{r}u, \tag{1}$$

где, следуя методу § 5, принято

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r} + v\frac{\partial}{r\,\partial\theta}. \tag{2}$$

Расхождение (Δ) мы найдем, если подсчитаем количество жидкости, втекшей в квазипрямоугольный элемент, стороны которого суть δr и $r\,\delta\theta$, следовательно,

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\,\partial\theta}. \tag{3}$$

В сферических координатах мы обозначим радиальную скорость в точке (r, θ, φ) через u, скорость, перпендикулярную к r в плоскости изменения θ, через v и скорость, перпендикулярную к плоскости отсчета θ, через w. Из начала координат проведем три линии, параллельные указанным направлениям, именно так, чтобы они, как это обычно принимается, образовали правую систему координат. Изменения угловых координат частицы за время δt будут представляться в виде

$$r\,\delta\theta = v\,\delta t, \quad r\sin\theta\,\delta\varphi = w\,\delta t.$$

Эти изменения составят вращение указанной системы относительно ее мгновенного положения с компонентами:

$$\cos\theta\,\delta\varphi, \quad -\sin\theta\,\delta\varphi, \quad \delta\theta.$$

Отсюда, если мы через $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ обозначим компоненты мгновенной угловой скорости системы координат, получим

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{w}{r}\operatorname{ctg}\theta, \\ \mathbf{q} &= -\frac{w}{r}, \\ \mathbf{r} &= \frac{v}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Следовательно, компоненты требуемого ускорения частицы в точке (r, θ, φ) будут представляться в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - rv + qw &= \frac{Du}{Dt} - \frac{v^2+w^2}{r}, \\ \frac{Dv}{Dt} - pw + ru &= \frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} - \frac{w^2}{r}\operatorname{ctg}\theta, \\ \frac{Dw}{Dt} - qu + pv &= \frac{Dw}{Dt} + \frac{wu}{r} + \frac{vw}{r}\operatorname{ctg}\theta, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r} + v\frac{\partial}{r\,\partial\theta} + w\frac{\partial}{r\sin\theta\,\partial\varphi}. \tag{6}$$

Расхождение может быть найдено вычислением втекшего потока в квазипрямоугольный параллелепипед, ребра которого суть δr, $r\,\delta\theta$, $r\sin\theta\,\delta\varphi$; таким образом

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\,\partial\theta} + \frac{v}{r}\operatorname{ctg}\theta + \frac{\partial w}{r\sin\theta\,\partial\varphi}. \tag{7}$$

ГЛАВА ВТОРАЯ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

§ 17. Существует обширный и важный класс случаев, когда компоненты скорости u, v, w могут быть выражены через однозначную функцию φ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ v &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ w &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$ *)

Эта функция φ называется *потенциалом скоростей* вследствие аналогии с потенциальной функцией теории тяготения, электростатики и т. д. Общая теория потенциала скоростей будет изложена в следующей главе, но уже здесь мы дадим доказательство следующей важной теоремы:

Если в некоторый момент времени для некоторой конечной части совершенной жидкости, двигающейся под действием сил, обладающих потенциалом, существует потенциал скоростей, причем плотность жидкости постоянна или есть функция только давления, то потенциал скоростей должен существовать для указанной части жид-

*) Теория „циклических" потенциалов скоростей будет разобрана впоследствии.

кости для всех предшествующих и для всех последующих моментов времени [1]).

Если в уравнениях § 15 мы возьмем момент времени в начале отсчета, для которого существует потенциал скоростей φ, то мы должны иметь

$$u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc = -d\varphi_0$$

во всей рассматриваемой части жидкой массы. Умножая уравнения (2) § 15 соответственно на da, db, dc и складывая их, получим

$$\frac{\partial x}{\partial t}\,dx + \frac{\partial y}{\partial t}\,dy + \frac{\partial z}{\partial t}\,dz - (u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc) = -d\chi,$$

или в обозначениях Эйлера

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = -d(\varphi_0 + \chi) = -d\varphi,$$

где $\varphi_0 + \chi$ обозначено через φ. Так как верхняя граница в (1) § 15 может быть как положительной, так и отрицательной, то наше предложение тем самым доказано.

Необходимо особенно отметить, что существование потенциала скоростей относится не к частям пространства, а к частям жидкости. Часть жидкости, для которой существует потенциал скоростей, движется дальше и несет с собой это свойство, в то время как часть пространства, которую жидкость первоначально занимала, с течением времени может быть занята жидкостью, которая сначала не обладала этим свойством и поэтому не сможет его приобрести.

Класс случаев, в которых существует однозначный потенциал скоростей, охватывает все те движения, которые возникают из состояния покоя под действием сил рассмотренного здесь типа. В самом деле, мы имеем в начале движения

$$u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc = 0,$$

т. е.

$$\varphi_0 = \text{const}.$$

Ограничения, при которых доказана рассмотренная выше теорема, ни в коем случае не следует упускать из виду. Было не только допущено, что внешние, отнесенные к единице массы, силы X, Y, Z обладают потенциалом, но также, что плотность или постоянна, или есть функция, зависящая только от p. Это последнее условие, например, не выполняется при конвекционных течениях, которые возникают от неравномерного нагревания жидкости, а также при волно-

---

[1]) Lagrange, Mémoire sur la Théorie du Mouvement des Fluides, Nouv. mém. de l'Acad. de Berlin, 1781 (Oeuvres, IV, 714). Доказательство воспроизводится в Mécanique Analitique. Теорема, высказанная Лангранжем, и ее доказательство были не вполне строгие; первое строгое доказательство было дано Коши в Mémoire sur la Théorie des Ondes, Mém. de l'Acad. roy. des Sciences, I (1827) (Oeuvres Complètes, Paris, 1882, I-я серия, I, 38); мемуар датирован 1815 годом. Другое доказательство дано Стоксом, Camb. Trans., VIII (1845) (Смотреть также Math. and Phys. Papers, Cambridge, 1880, I, 106, 158, и II, 36 стр.); там же дано прекрасное историческое и критическое изложение всего вопроса.

вом движении неоднородной, но несжимаемой жидкости, которая первоначально располагалась в горизонтальных слоях одинаковой плотности. Другой исключительный случай образуют „электромагнитные" вращения; см. § 29.

§ 18. Сравнение формул (1) с уравнениями (2) § 11 приводит к простому физическому истолкованию функции φ.

Всякое действительное состояние движения жидкости, для которого существует однозначный потенциал скоростей, может быть мгновенно получено из состояния покоя приложением подходяще выбранной системы импульсивных давлений. Это предложение получается из указанных уравнений, из которых, кроме того, следует, что

$$\varphi = \frac{\tilde{\omega}}{\varrho} + \text{const},$$

так что

$$\tilde{\omega} = \varrho\varphi + C$$

дает искомую систему импульсивных давлений. Точно так же

$$\tilde{\omega} = -\varrho\varphi + C$$

представляет систему импульсивных давлений, мгновенно приводящих движение вполне к состоянию покоя [1]). Появление произвольной постоянной в этих выражениях показывает только, что всюду одинаковое давление, действующее во всей жидкой массе, не может оказать влияния на движение.

В случае газа φ может быть истолковано как потенциал тех внешних импульсивных сил, благодаря которым действительное движение в некоторый момент могло бы произойти мгновенно из состояния покоя.

Состояние движения, для которого не существует потенциала скоростей, не может ни возникнуть, ни уничтожиться под действием импульсивных давлений или внешних сил, обладающих потенциалом.

§ 19. Существование потенциала скоростей обусловливает, кроме того, еще определенные *кинематические* свойства движения.

Будем называть *линией тока* такую линию, направление касательной в каждой точке которой совпадает с направлением движения жидкости. Диференциальные уравнения системы этих линий будут

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}. \qquad (2)$$

Соотношение (1) показывает, что если существует потенциал скоростей, то линии тока всюду перпендикулярны к системе поверхностей $\varphi = \text{const}$, которые называются *поверхностями равного потенциала*.

---

[1]) Это истолкование дано Коши (см. прим. на стр. 33) и Пуассоном, Poisson, Mém. de l'Acad. roy. des Sciences, I (1816).

Проведем из точки (x, y, z) линейный элемент δs в направлении (l, m, n); тогда компонента скорости в этом направлении будет равна $lu+mv+nw$, или

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds};$$

последнее выражение равно $-\frac{\partial\varphi}{\partial s}$. Следовательно, скорость в любом направлении равна производной с обратным знаком, взятой в этом направлении, от функции φ.

Проведем поверхности равного потенциала, соответствующие определенным значениям φ, отличающимся одно от другого на бесконечно малое количество. Если мы возьмем элемент δs, нормальный к какой-нибудь поверхности $\varphi=\text{const}$, то получим, что скорость в любой точке рассматриваемой поверхности обратно пропорциональна взаимному расстоянию в области этой точки двух соседних поверхностей равного потенциала. Поэтому, если какая-нибудь поверхность равного потенциала пересекает самое себя, то скорость жидкости для линии пересечения равна нулю. Пересечение же двух *различных* поверхностей равного потенциала указывает на бесконечно большую скорость.

§ 20. При условиях, допущенных в § 17, можно непосредственно интегрировать уравнения движения для той части жидкости, где существует потенциал скоростей, в случаях если ϱ постоянно или есть определенная функция от p. В самом деле, в силу соотношений

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x},$$

вытекающих из соотношений (1), уравнения § 6 можно представить в виде

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\partial\Omega}{\partial x}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\text{ и т. д.}\qquad(3)$$

Эти уравнения имеют интеграл

$$\int\frac{dp}{\varrho}+\frac{1}{2}q^2+E+\Omega=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+F(t),\qquad(4)$$

где q обозначает результирующую скорость $(u^2+v^2+w^2)$, $F(t)$ есть произвольная функция только от t, а E определяется выражением (7) § 10 и может быть истолковано (в случае газа), как и выше.

В случае несжимаемой жидкости это уравнение принимает особенно простой вид; именно, в этом случае мы имеем

$$\frac{p}{\varrho}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\Omega-\frac{1}{2}q^2+F(t),\qquad(5)$$

к которому надо присоединить уравнение неразрывности

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0,\qquad(6)$$

эквивалентное уравнению (1) § 8. Если, как это будет во многих

случаях, которые мы будем изучать, граничные условия суть чисто кинематические, то процесс решения состоит в том, чтобы найти функцию, удовлетворяющую как уравнению (6), так и заданным условиям на граничной поверхности. Тогда давление определится из соотношения (5) с точностью до аддитивной функции от t. Его можно будет определить вполне только тогда, когда значение p в некоторой точке жидкости дано для всех значений t. Так как член $F(t)$ не влияет на *результирующую* давлений, то его часто опускают.

Предположим, например, что одно или несколько твердых тел движутся в ограниченной со всех сторон твердыми стенками жидкости, и пусть возможно, например, при помощи поршня произвести произвольное давление в определенной точке ее границы. Как бы мы ни меняли величину давления на поршень, движение жидкости и твердых тел при этом останется без всякого изменения, так как давление во всех точках жидкости будет при этом одновременно и одинаковым образом повышаться и падать. Физическое основание этого парадокса (а таковой здесь налицо) заключается в том, что жидкость рассматривается как абсолютно несжимаемая. В действительности же изменения давления в капельных жидкостях распространяются хотя и с очень большой, однако же не с бесконечно большой скоростью.

Если координатная система находится в движении, то формула для давления будет иметь вид

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Omega - \frac{1}{2} q^2 - \mathfrak{p}\left(y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \\ - \mathfrak{q}\left(z \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - \mathfrak{r}\left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right), \qquad (7)$$

где

$$q^2 = (u - \mathfrak{u})^2 + (v - \mathfrak{v})^2 + (w - \mathfrak{w})^2. \qquad (8)$$

Это легко получить из данных в § 12 формул (3) для ускорения.

Установившееся движение

§ 21. Если в каждой точке скорость постоянна по величине и направлению, т. е. если

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \qquad (1)$$

то движение называется *установившимся*.

При установившемся движении линии тока совпадают с траекториями частиц. В самом деле, если P, Q суть две бесконечно близкие точки линии тока, то частица, которая в некоторый момент времени находилась в P, будет двигаться в направлении касательной в точке P и потому по истечении бесконечно малого промежутка времени попадет в точку Q. Так как движение установившееся, то линии тока остаются неизменными; поэтому направление движения частицы в точке Q совпадет с касательной к той же самой линии тока, т. е. частица описывает и дальше эту линию тока, которая совпадает таким образом с траекторией.

Линии тока, проведенные через бесконечно малую замкнутую кривую, образуют трубку, которая называется *трубкой тока*.

При установившемся движении из уравнения (4) предыдущего параграфа мы получим

$$\int \frac{dp}{\varrho} = -\Omega - \frac{1}{2} q^2 + \text{const.} \tag{2}$$

Однако в этом случае закон изменения давления *вдоль линии тока* можно найти и без допущения существования потенциала скоростей. В самом деле, если δs обозначает элемент линии тока, то ускорение в направлении движения равно $q \frac{\partial q}{\partial s}$, и мы имеем

$$q \frac{\partial q}{\partial s} = -\frac{\partial \Omega}{\partial s} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s}. \tag{3}$$

Отсюда, интегрируя вдоль линии тока, получим

$$\int \frac{dp}{\varrho} = -\Omega - \frac{1}{2} q^2 + C. \tag{4}$$

Это уравнение формально очень похоже на уравнение (2) но оно более общо, поскольку оно не предполагает существования потенциала скоростей. Необходимо, однако, заметить, что const уравнения (2) и C уравнения (4) имеют различные значения; первое есть абсолютное постоянное, в то время как последнее постоянно только вдоль определенной линии тока, но может меняться при переходе от одной линии тока к другой.

§ 22. Уравнение (4) находится в тесной связи с принципом энергии. Если существование последнего допустить независимо, то формулу (4) можно вывести следующим образом [1]). Возьмем сначала частный случай капельной жидкости и рассмотрим линию тока, которая в некоторый момент времени занимает положение AB трубки тока, причем движение происходит в направлении от A к B. Пусть p есть давление, q — скорость, Ω — потенциал внешних сил, σ — площадь поперечного сечения в A; соответствующие количества в B отметим значками. Через короткий промежуток времени нить тока принимает положение A_1B_1; пусть m есть масса, заключенная между сечениями A и A_1 или B и B_1. Так как движение установившееся, то приращение энергии при движении жидкости будет равно

$$m\left(\frac{1}{2} q'^2 + \Omega'\right) - m\left(\frac{1}{2} q^2 + \Omega\right).$$

Далее, произведенная работа равна

$$p \frac{m}{\varrho} - p' \frac{m}{\varrho}.$$

Приравняв приращение энергии произведенной работе, мы будем иметь

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega = \frac{p'}{\varrho} + \frac{1}{2} q'^2 + \Omega',$$

[1]) По существу это есть не что иное, как обращение метода Даниила Бернулли, Bernoulli, Hydrodynamica, Argentorati, 1738.

или, употребляя C в том же смысле, как выше, мы получим

$$\frac{p}{\varrho} = -\Omega - \frac{1}{2} q^2 + C; \tag{5}$$

а это и есть уравнение (4) § 21 при постоянном ϱ.

Чтобы вывести соответствующую формулу для сжимаемых жидкостей, заметим, что жидкость в каком-нибудь сечении обладает в этом случае, кроме кинетической и потенциальной энергии, еще *внутренней* или свободной энергией на единицу массы, равной

$$-\int p d\left(\frac{1}{\varrho}\right), \quad \text{или} \quad -\frac{p}{\varrho} + \int \frac{dp}{\varrho}.$$

Прибавляя это выражение к (5), получим уравнение (4).

В случае газа, подчиненного адиабатическому закону, мы имеем

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\gamma}, \tag{6}$$

и уравнение (4) принимает вид

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\varrho} = -\Omega - \frac{1}{2} q^2 + C. \tag{7}$$

§ 23. Из предыдущих уравнений видно, что при установившемся движении давление для точек вдоль линии тока [1]), при прочих равных условиях, будет наибольшее там, где скорость наименьшая, и обратно. Это предложение само собой будет понятно, если мы заметим, что движение точки должно ускоряться, если она переходит от места с более высоким давлением к месту с более низким давлением, и обратно [2]).

В тех случаях, когда имеют место уравнения предыдущего параграфа, из них вытекает существование предела, который скорость не может превзойти [3]). Вообразим, например, жидкость, вытекающую из резервуара, в котором мы можем пренебречь скоростью и внешними силами и где давление равно p_0. Поэтому в формуле (5) мы должны положить $C = \frac{p_0}{\varrho}$; следовательно, мы имеем

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \varrho q^2. \tag{8}$$

Хотя и найдено, что жидкость, из которой удалены все следы воздуха или других растворенных газов, может выдерживать отрицательное давление, или растяжение, заметной величины [4]), все же, од-

---

[1]) Мы в дальнейшем покажем, что это ограничение отпадает, когда существует потенциал скоростей.

[2]) Некоторые интересные практические разъяснения этого принципа были даны Фрудом (Froude) в Nature, XIII (1875).

[3]) Ср. Helmholtz, Über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen, Berl. Monatsberichte, April, 1868; Phil. Mag. Nov., 1868 (Wissenschaftliche Abhandlungen, Leipzig, 1882—1883, I. 146).

[4]) Reynolds O., Manch. Mem., VI (1877) (Scientific Papers, Cambridge, 1900, I, 231).

нако, это не имеет места для жидкостей при нормальных условиях. Таким образом из уравнения (8) следует, что практически q не может превосходить значения $\left(\frac{2p_0}{\varrho}\right)^{1/2}$. Эта предельная скорость есть та самая скорость, с которой жидкость вытекала бы из резервуара в пустоту. В случае воды, находящейся под атмосферным давлением, она равна скорости, которая соответствует высоте водяного столба в барометре и равна приблизительно 14 *м/сек.*

Если в каком-нибудь случае движения жидкости, аналитическое выражение которого нам удалось установить, мы предположим, что движение постепенно ускоряется, до тех пор пока скорость в некотором месте, наконец, достигает указанного здесь предела, то в этом месте образуется разрыв и, следовательно, условия задачи должны быть в той или иной степени изменены.

В следующей главе (§ 44) будет показано, что при безвихревом движении капельной жидкости, будет ли оно установившимся или нет, место самого низшего давления находится всегда в точке, лежащей на границе области; при этом предполагается, что внешние силы обладают потенциалом Ω, который удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}=0.$$

Сюда, конечно, относится и случай силы тяжести.

В общем случае жидкости, для которой p есть данная функция от ϱ, мы получим, полагая в уравнении (4) $\Omega=0$, $q_0=0$, выражение

$$q^2=2\int_p^{p_0}\frac{dp}{\varrho}. \tag{9}$$

Для газа, подчиненного адиабатическому закону, это дает

$$q^2=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\varrho_0}\left\{1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}, \tag{10}$$

или

$$q^2=\frac{2}{\gamma-1}(c_0^2-c^2), \tag{11}$$

где $c=\left(\frac{\gamma p}{\varrho}\right)^{1/2}=\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)^{1/2}$ означает скорость звука в рассматриваемом газе при давлении p и плотности ϱ, а c_0 есть скорость звука в газе при условиях, имеющих место в резервуаре (см. гл. X). Отсюда предельная скорость равна

$$\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2}c_0$$

или $2{,}214\,c_0$, если $\gamma=1{,}408$.

§ 24. Закончим эту главу некоторыми простыми применениями уравнений движения.

Истечение капельных жидкостей

Как первый пример мы возьмем истечение капельной жидкости из малого отверстия в стенке сосуда, который всегда остается наполненным до одинаковой высоты, так что движение можно рассматривать как установившееся.

Пусть начало координат лежит на свободной поверхности, ось z направлена вертикально вниз, так что $\Omega = -gz$. Если мы возьмем площадь свободной поверхности большой сравнительно с сечением отверстия, то скоростью находящихся на ней частиц можно пренебречь. Если значение C мы определим из § 21 (4) таким образом, что для $z = 0$ будет $p = P$ (равно атмосферному давлению), то получим [1])

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{P}{\varrho} + gz - \frac{1}{2} q^2. \tag{1}$$

На поверхности вытекающей струи мы имеем $p = P$, и поэтому

$$q^2 = 2gz; \tag{2}$$

это есть скорость при свободном падении с поверхности уровня. Этот факт известен, как теорема Торричелли [2]).

Мы не можем, однако, этот результат применить непосредственно к вычислению количества вытекающей жидкости по следующим двум основаниям. Во-первых, вытекающая жидкость должна рассматриваться как совокупность большого числа элементарных струй, которые со всех сторон сходятся к отверстию; поэтому их движение не во всех точках будет перпендикулярно к сечению отверстия, но будет тем более наклонно, чем дальше мы удаляемся от центра к краю. Во-вторых, сходящееся движение элементарных струй обусловливает повышение давления в отверстии внутри струи по сравнению с поверхностью струи, где давление равно атмосферному. Поэтому скорость внутри струи несколько меньшая, чем дает уравнение (2).

Однако опыты показывают, что только что рассмотренное движение перестает быть сходящимся на незначительном расстоянии от отверстия, и в случае круглого отверстия струя делается почти цилиндрической. Отношение площади сечения S' в самом сжатом месте к площади S отверстия называется *коэфициентом сжатия*. Если отверстие есть просто дыра в тонкой стене, то для этого коэфициента найдено экспериментально значение, приблизительно равное 0,62.

Так как траектории частиц в сжатом сечении струи приблизительно прямолинейны, то при переходе от оси струи к ее поверхности давление или вовсе не изменяется или изменяется очень мало. Поэтому мы можем считать здесь скорость постоянной на всем поперечном сечении и принять ее равной значению, данному формулой (2), где z есть глубина сжатого сечения относительно свобод-

[1]) Этим результатом мы обязаны Д. Бернулли, см. стр. 37.
[2]) Torricelli, De motu gravium naturaliter accelerato. Firenze, 1643.

ной поверхности жидкости в сосуде. Поэтому количество жидкости, вытекающее в единицу времени, будет равно

$$(2gz)^{1/2}\,\varrho S'. \tag{3}$$

Определение формы вытекающей струи представляет трудности, которые могли быть преодолены только в немногих идеальных случаях плоского движения жидкости (см. гл. IV)[1]. Можно, однако, показать, что коэфициент сжатия должен заключаться между $^1/_2$ и 1. Чтобы дать доказательство в простейшей форме, предположим сначала, что жидкость вытекает из сосуда, в котором давление в некотором отдалении от отверстия превосходит давление вне сосуда на величину P, причем силой тяжести мы пренебрегаем. Когда отверстие закрыто пластинкой, то результирующая всех действующих на сосуд давлений равна, конечно, нулю. Если теперь мы удалим пластинку и предположим на мгновение, что давление на стенки сосуда остается равным P, то на сосуд будет действовать неуравновешенное давление PS в направлении, противоположном направлению вытекающей струи, которое стремится подвинуть сосуд назад. Одинаковая, но направленная в противоположную сторону реакция на жидкость дает в единицу времени массе $\varrho qS'$, протекающей через сжатое сечение, скорость q. Следовательно, мы имеем

$$PS = \varrho q^2 S'. \tag{4}$$

Принцип энергии § 22 дает

$$P = \frac{1}{2}\,\varrho q^2; \tag{5}$$

сравнивая между собой (4) и (5), мы находим, что $S' = {}^1/_2 S$. Формула (1) показывает, что давление на стенки, особенно вблизи отверстия, на самом деле падает немного ниже статического давления P, так что левая часть (4) при подстановке значения P из (5) будет значительно преуменьшена. Следовательно, отношение S'/S будет, вообще, больше $^1/_2$.

В частном случае, именно если приставить к отверстию изнутри короткую цилиндрическую трубку, вышеуказанное допущение будет достаточно точно, и получающееся для коэфициента значение $^1/_2$ совпадает с опытом.

Можно легко видоизменить рассуждение с тем, чтобы учесть также силу тяжести (или другие консервативные силы). Мы должны только взять для P разность статического давления на уровне отверстия и внешнего давления. Разностью уровней между отверстием и сжатым сечением струи при этом пренебрегаем[2]).

---

[1]) В настоящее время удалось решить и некоторые задачи для случая осевой симметрии (Vasilesco). *Прим. ред.*

[2]) Вышеизложенной теорией мы обязаны Borda (Mém. de l'Acad. des Sciences, 1766), который производил также опыты со специального вида насадками (мундштуками), описанными здесь, и нашел $\frac{S}{S'} = 1{,}942$. Вопрос был

Другое важное применение теоремы Бернулли заключается в измерении скорости течения при помощи трубки Пито. Этот прибор состоит из тонкой трубки, открытый конец которой направлен против потока, в то время как другой конец связан с манометром. Вдоль линии тока, которая совпадает с осью трубки, скорость быстро падает от q до 0, так что манометр показывает значение $p+{}^1/_2\varrho q^2$. Статическое давление p определяет второй манометр, связанный с трубкой, вставленной в малое отверстие стенки, вдоль которой скользит поток. Так как плотность ϱ известна, то сравнение отсчетов манометров дает значение q. Оба приспособления часто соединяются в один прибор. Особенно этот метод находит применение в аэродинамике, так как найдено, что сжимаемость воздуха вплоть до скоростей порядка 60 *м/сек* не имеет значения.

Истечение газов

§ 24а. Установившееся течение газа, подчиненного адиабатическому закону, представляет некоторые интересные свойства.

Обозначим через σ поперечное сечение в некоторой точке трубки тока и через δs — элемент длины в направлении течения. Пренебрегая внешними силами, мы получим вместо уравнения (10) § 23

$$q^2-q_0^2=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\varrho_0}\left\{1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}, \tag{1}$$

причем индекс 0 относится к какому-нибудь определенному сечению трубки. Если обозначить через c скорость звука для значений p и ϱ в рассматриваемом месте, то уравнение (1) можно представить в виде

$$q^2+\frac{2}{\gamma-1}c^2=q_0^2+\frac{2}{\gamma-1}c_0^2. \tag{2}$$

Так как масса жидкости, протекающей в единицу времени через различные сечения, всегда одна и та же, то мы имеем

$$\varrho q\sigma=\varrho_0 q_0\sigma_0. \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{ds}=-\frac{1}{q}\frac{dq}{ds}-\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dp}\frac{dp}{ds}=-\frac{1}{q}\frac{dq}{ds}\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right). \tag{4}$$

Из формул (2) и (4) следует, что в сужающейся трубке q будет расти, а c уменьшаться, или обратно, смотря по тому, будет ли q меньше или больше, чем c. Для расширяющейся трубки имеет место противоположное заключение. Резюмируя, можно утверждать, что

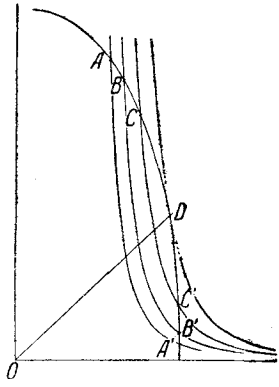
вновь изучен Hanlon, Proc. Lond. Math. Soc., III, 4 (1869); далее он был разработан в заметке, прибавленной Максвеллом к этой статье. См. также Froude и J. Thomson, Proc. Glasgow. Phil. Soc., X (1876). Различными авторами было замечено, что в случае насадки, представляющей по направлению внутрь расходящийся конус, поперечное сечение в сжатом месте может быть меньше, чем половина площади *внутреннего* отверстия.

в сужающейся трубке скорость течения и местная скорость звука постоянно приближаются друг к другу, в то время как в расширяющейся трубке они все более удаляются друг от друга.

Эти результаты следуют также из графического представления уравнений (2) и (3). Так как c^2 пропорционально $\varrho^{\gamma-1}$, то формулу (3) можно представить в виде

$$c^{\frac{2}{\gamma-1}} q\sigma = c_0^{\frac{2}{\gamma-1}} q_0\sigma_0. \tag{5}$$

Если мы возьмем абсциссы пропорциональными c и ординаты пропорциональными q, то уравнение (2) представляет неподвижный эллипс, проходящий через точку (c_0, q_0). Для каждого определенного значения $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ уравнению (5) соответствует некоторый вид гиперболической кривой. При некотором значении σ' для σ эта кривая будет касаться эллипса и для этой точки мы получим $q = c$.



Фиг. 2.

Кривые AA', BB', CC' на представленной фигуре соответствуют отношениям

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = 8,\ 4,\ 2,$$

причем точка D соответствует наименьшему сечению σ'. Для еще меньших значений σ точки пересечения с эллипсом будут мнимые, и установившееся адиабатическое течение окажется невозможным. Из диаграммы следует, что для сечения, площадь которого больше чем σ', существуют две возможные пары значений q и c, как это заметили Осборн Рейнольдс и другие.

Если q меньше c, то соответствующая точка эллипса лежит ниже OD. В суживающейся трубке она занимает последовательно положения A', B', C', причем скорость течения возрастает, а скорость звука уменьшается, пока не будет достигнуто критическое сечение σ'. Если, с другой стороны, q больше c, то соответствующие точки лежат над OD. В суживающейся трубке мы имеем последовательные положения точек A, B, C, при которых скорость течения уменьшается, а скорость звука возрастает.

§ 25. Изучим теперь особо случай, когда газ вытекает через малое отверстие из сосуда, в котором давление равно p_0 и плотность равна ϱ_0, в пространство, в котором давление равно p_1.

До тех пор пока отношение $\frac{p_0}{p_1}$ давления внутри сосуда к давлению вне сосуда не превосходит определенного предела, который мы сейчас укажем, истечение будет происходить так же, как и в случае капельных жидкостей, и мы найдем количество вытекшей массы, если положим в формуле (10) § 23, что $p = p_1$, и полученное значение для q умножим на площадь σ_1 сжатого сечения. Отсюда для количества вытекающей в единицу времени массы мы получим [1])

$$q_1\varrho_1\sigma_1 = \left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2} c_0\varrho_0 \left\{ \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right\}^{1/2} \sigma_1. \tag{6}$$

[1]) Результат эквивалентен результату, данному Saint Venant и Wantzel, Journal de l'École Polyt., XVI, 92 (1839) и исследованному Stokes, Brit. Ass. Reports, 1846 (Papers, I, 176).

Ясно, однако, что применимость этого результата должна быть ограничена, так как иначе мы пришли бы к парадоксальному заключению, что для $p_1 = 0$, т. е. при истечении в пустоту, вытекающее количество газа должно быть равно нулю. Разъяснением этого положения мы обязаны Осборну Рейнольдсу [1]). Можно показать, что ϱq есть максимум, т. е. что площадь поперечного сечения элементарной струи есть минимум, когда, как то следует из формулы (4), скорость течения равна скорости звука в газе при данном давлении и данной плотности. Из формулы (11) § 23 мы имеем при адиабатической гипотезе

$$\frac{c}{c_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/2}, \tag{7}$$

и поэтому

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varrho}{\varrho_0} &= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \\ \frac{p}{p_0} &= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

или, если $\gamma = 1{,}408$, то

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= 0{,}634\varrho_0, \\ p &= 0{,}527 p_0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Если p_1 меньше этого значения, то поток после того, как он перешел за рассматриваемую точку, вновь расширяется, пока на некотором расстоянии благодаря внутреннему трению не образуются вихри. Минимальные сечения элементарных струек должны лежать вблизи отверстия, из которого происходит истечение, и сумму этих сечений S можно принять за действующую площадь отверстия. Скорость истечения, вычисленная по формуле (2), будет равна

$$q = 0{,}911 c_0.$$

Следовательно, количество жидкости, вытекшей в единицу времени, равно $q\varrho S$, где q и ϱ имеют только что найденные значения, и оно поэтому почти не зависит от внешнего давления p_1, пока последнее остается меньшим $0{,}527 p_0$. Физическое основание этого состоит в том, как утверждает Рейнольдс, что до тех пор, пока скорость в какой-либо точке превосходит при допущенных условиях скорость звука, из этой точки не может распространяться назад никакое изменение давления, которое могло бы сообщить движение, противоположное течению [2]).

Новейшие опыты Стантона [3]) подтверждают в общем точку зрения Рейнольдса и разъясняют некоторые кажущиеся противоречия.

При аналогичных соотношениях для давления, скорости истечения различных газов, поскольку можно допустить, что γ для каждого из них имеет то же самое значение, пропорциональны соответствующим скоростям звука. Поэтому, как мы увидим в главе X, скорость истечения будет меняться обратно, а вытекающее в единицу времени количество жидкости прямо пропорционально квадратному корню из плотности [4]).

---

[1]) Reynolds, On the Flow of Gases, Proc. Manch. Lit. and Phil. Soc., Nov. 17 (1885); Phil. Mag., March., 1886 (Papers, II, 311). Аналогичное разъяснение дано Hugoniot, Comptes Rendus, June 28, July 26, Decembre 13, 1886.

[2]) Дальнейшие обсуждения и литературные указания см. Rayleigh, On the Discharge of Gases under High Pressures, Phil. Mag. (6), XXXII, 177 (1916) (Scientific Papers, Cambridge, 1899—1920, VI, 407).

[3]) Stanton, Proc. Roy. Soc. A, CXI, 306 (1926).

[4]) Ср. Graham, Phil. Trans, 1846.

Вращение капельной жидкости

§ 26. Рассмотрим сначала случай, когда масса жидкости равномерно вращается с постоянной угловой скоростью ω около направленной вверх оси z и находится только под действием силы тяжести. Согласно предположению мы имеем

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad w = 0,$$
$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g.$$

Уравнение неразрывности выполняется тождественно, и уравнения движения, очевидно, имеют вид

$$-\omega^2 x = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\omega^2 y = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad 0 = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} - g. \tag{1}$$

Эти уравнения имеют общий интеграл

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2) - gz + \text{const}. \tag{2}$$

Поэтому свободная поверхность $p = \text{const}$ есть параболоид вращения около оси z, который обращен кверху вогнутостью и имеет параметр $\frac{2g}{\omega^2}$.

Так как

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega,$$

то потенциала скоростей здесь существовать не может. В „совершенной жидкости, т. е. в такой, в которой невозможны тангенциальные напряжения, движение такого рода при помощи консервативной системы сил вызвано быть не может.

§ 27. Вместо того чтобы предполагать угловую скорость ω всюду одинаковой, примем ее за функцию расстояния r от оси и найдем, какой вид должна иметь эта функция, чтобы для движения существовал потенциал скоростей. Мы имеем в этом случае

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega + r\frac{d\omega}{dr};$$

чтобы правая часть обращалась в нуль, должно быть $\omega r^2 = \mu$, где μ постоянное. В этом случае скорость в любой точке равна $\frac{\mu}{r}$, так что из уравнения (2) § 21, при отсутствии внешних сил, мы имеем

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const} - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{r^2}. \tag{1}$$

Применяя полярные координаты, мы получим для определения φ уравнения

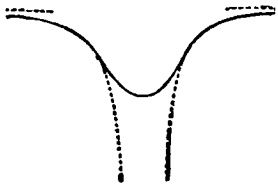
$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{r\,\partial \theta} = -\frac{\mu}{r},$$

следовательно,

$$\varphi = -\mu\theta + \text{const} = -\mu \operatorname{arctg} y/x + \text{const}. \tag{2}$$

Мы имеем здесь пример *циклической* функции. Функция называется *однозначной* в некоторой области, если каждой точке этой области соответствует одно и только одно определенное значение функции таким образом, что эти значения образуют непрерывную систему. Это невозможно для функции (2), так как значение φ меняется на $-2\pi\mu$ всякий раз, когда соответствующая точка описывает замкнутую линию около начала координат. Общая теория циклических потенциалов скоростей будет дана в следующей главе.

Если действует сила тяжести, и мы примем ось z направленной вертикально вверх, то мы должны к правой части уравнения (1) прибавить еще член $-gz$. В этом случае свободная поверхность жидкости есть поверхность, образованная вращением гиперболической кривой $x^2z = \text{const}$ вокруг оси z.



Фиг. 3.

Соединяя надлежащим образом оба вышеизложенных решения, мы получаем случай „комбинированного вихря" Ранкина. При этом движение происходит всюду по соосным кругам; предположим, что скорость равна ωr при r, заключенном между $r=0$ и $r=a$, и равна $\frac{\omega a^2}{r}$ при $r > a$. Соответствующие виды свободной (фиг. 3) поверхности представлены уравнениями

$$z=\frac{\omega^2}{2g}(r^2-a^2)+C \quad \text{и} \quad z=\frac{\omega^2}{2g}\left(a^2-\frac{a^4}{r^2}\right)+C$$

и переходят при $r=a$ непрерывно друг в друга. Отсюда глубина понижения в центре относительно общего уровня свободной поверхности равна $\frac{\omega^2a^2}{g}$.

§ 28. В качестве примера, противоположного предыдущему, рассмотрим случай внешних сил, которые не имеют потенциала. Предположим, что жидкая масса, заполняющая прямой круглый цилиндр, начинает двигаться из положения покоя под действием сил

$$X=Ax+By, \quad Y=B'x+Cy, \quad Z=0,$$

причем ось z совпадает с осью цилиндра.

Если мы положим $u=-\omega y$, $v=\omega x$, $w=0$, где ω есть функция только от t, то эти выражения удовлетворяют уравнению неразрывности и граничным условиям. Очевидно, что уравнения движения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} -y\frac{d\omega}{dt}-\omega^2x&=Ax+By-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ x\frac{d\omega}{dt}-\omega^2y&=B'x+Cy-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Если мы продифференцируем первое из этих уравнений по y, второе по x и вычтем, то исключим p и получим

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{1}{2}(B'-B). \tag{2}$$

Мы видим, что жидкость вращается, как твердое тело, с равномерно ускоренной угловой скоростью вокруг оси z, за исключением частного слу-

чая, когда $B=B'$. Чтобы найти p, подставим найденное для $\frac{d\omega}{dt}$ значение в уравнения (1) и проинтегрируем их; мы получим

$$\frac{p}{\varrho}=\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(Ax^2+2\beta xy+Cy^2)+\text{const.},$$

где

$$2\beta=B+B'.$$

§ 29. В качестве последнего рассмотрим пример, связанный с теорией „электромагнитных вращений".

Если в равномерном магнитном поле через проводящую жидкость к металлическим стенкам цилиндрического сосуда течет по радиусам электрический ток от проводника, служащего осью, то внешние силы должны иметь следующий вид [1]:

$$X=-\frac{\mu y}{r^2},\quad Y=\frac{\mu x}{r^2},\quad Z=0.$$

Полагая $u=-\omega y$, $v=\omega x$, $w=0$, где ω есть функция только от r и t, имеем

$$\left.\begin{aligned}-y\frac{\partial\omega}{\partial t}-\omega^2 x&=-\frac{\mu y}{r^2}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ x\frac{\partial\omega}{\partial t}-\omega^2 y&=\frac{\mu x}{r^2}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Исключая p, получим

$$2\frac{\partial\omega}{\partial t}+r\frac{\partial^2\omega}{\partial r\,\partial t}=0.$$

Решение этого уравнения есть

$$\omega=\frac{F(t)}{r^2}+f(r),$$

где F и f обозначают произвольные функции. Если ω обращается в нуль одновременно с t, то должно быть

$$\frac{F(0)}{r^2}+f(r)=0;$$

поэтому

$$\omega=\frac{F(t)-F(0)}{r^2}=\frac{\lambda}{r^2},\qquad(2)$$

где λ есть функция от t, которая при $t=0$ обращается в нуль. Вставляя это выражение в уравнения (1) и интегрируя, мы получим

$$\frac{p}{\varrho}=\left(\mu-\frac{d\lambda}{dt}\right)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\omega^2r^2+\chi(t).$$

Так как p обязательно есть однозначная функция, то должно быть $\frac{d\lambda}{dt}=\mu$ или $\lambda=\mu t$. Поэтому жидкость вращается с угловой скоростью, которая обратно пропорциональна квадрату расстояния от оси и прямо пропорциональна времени.

[1]) Если через C обозначить полное количество электричества на единицу длины оси, текущее наружу, и γ — компоненту магнитных сил, параллельную оси, то мы имеем $\mu=\frac{\gamma C}{2\pi\varrho}$. Выше разобранный случай особенно прост, так как силы X, Y, Z имеют потенциал, хотя и *„циклический"* ($\Omega=-\mu\operatorname{arctg} y/x$). Вообще, как правило, механические силы X, Y, Z при электромагнитных вращениях потенциала не имеют.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

БЕЗВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 30. Настоящая глава посвящена главным образом изложению некоторых общих теорем, относящихся к тому роду движения, о котором мы говорили еще в § 17—20, т. е. движения, для которого в определенной части жидкой массы выражение

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

есть полный диференциал. Начнем со следующего, принадлежащего Стоксу [1]), анализа движения элемента жидкости в самом общем случае.

Пусть компоненты скорости в точке (x, y, z) будут u, v, w; тогда компоненты относительной скорости в бесконечно близкой точке $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ будут

$$\left.\begin{aligned} \delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z, \\ \delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\delta z, \\ \delta w &= \frac{\partial w}{\partial x}\delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Если мы положим

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ f &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad g = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad h = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \xi &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

то уравнение (1) можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} \delta u &= a\,\delta x + \tfrac{1}{2}h\,\delta y + \tfrac{1}{2}g\,\delta z + \tfrac{1}{2}(\eta\,\delta z - \zeta\,\delta y), \\ \delta v &= \tfrac{1}{2}h\,\delta x + b\,\delta y + \tfrac{1}{2}f\,\delta z + \tfrac{1}{2}(\zeta\,\delta x - \xi\,\delta z), \\ \delta w &= \tfrac{1}{2}g\,\delta x + \tfrac{1}{2}f\,\delta y + c\,\delta z + \tfrac{1}{2}(\xi\,\delta y - \eta\,\delta x). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

---

[1]) Stokes, On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion etc. Cambr. Phil. Trans., VIII (1845) (Papers, I, 80).

Здесь мы отклоняемся от традиционного обозначения. Более часто символы ξ, η, ζ (Гельмгольц) или ω', ω'', ω''' (Стокс) применялись для обозначения компонент вихря

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

элемента жидкости. Основная кинематическая теорема — это как раз теорема, данная в § 32 (3), а употребляемое здесь в тексте определение ξ, η, ζ в этих формулах и в целом ряде последующих, относящихся к вихревому движению, избавляет от введения ненужного множителя 2 (или $^1/_2$, смотря по смыслу). Оно оказывается также удобным и при рассмотрении в § 148 электромагнитной аналогии.

Таким образом движение малого элемента с центром (x, y, z) можно мыслить состоящим из трех частей.

Первая часть, компоненты которой суть u, v, w, есть поступательное движение элемента, взятого как целое.

Вторая часть, выражаемая первыми тремя членами правой части уравнений (3), представляет движение, при котором каждая точка, если δx, δy, δz рассматривать как текущие координаты, движется в направлении той нормали к поверхности второго порядка

$$a(\delta x)^2 + b(\delta y)^2 + c(\delta z)^2 + f\,\delta y\,\delta z + g\,\delta z\,\delta x + h\,\delta x\,\delta y = \text{const}, \quad (4)$$

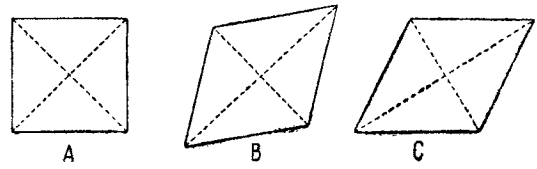
на которой она лежит. Если мы отнесем эту поверхность второго порядка к ее главным осям, то соответствующие части компонент скорости, параллельных этим осям, будут

$$\delta u' = a'\,\delta x', \quad \delta v' = b'\,\delta y', \quad \delta w' = c'\,\delta z', \quad (5)$$

а уравнение (4) после преобразования будет иметь вид

$$a'(\delta x')^2 + b'(\delta y')^2 + c'(\delta z')^2 = \text{const}.$$

Формулы (5) выражают то, что длина всякого отрезка элемента, параллельного x', удлиняется на (положительную или отрицательную) величину, пропорциональную a', в то время как отрезки, параллельные y' и z', соответственно удлиняются пропорционально b' и c'. Такое движение называется *чистым растяжением*, а главные оси поверхностей второго порядка (4) называются осями растяжения.



Фиг. 4.

Последние два члена в правой части уравнений (3) означают вращение элемента как целого около мгновенной оси. Компоненты угловой скорости этого вращения суть $\frac{1}{2}\xi$, $\frac{1}{2}\eta$, $\frac{1}{2}\zeta$[1]).

Вектор, компоненты которого суть ξ, η, ζ, обыкновенно называют *вихрем среды* в точке (x, y, z).

Эти исследования могут быть иллюстрированы при помощи так называемого *ламинарного* движения жидкости. Именно, если

$$u = \mu y, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

то

$$a = b = c = f = g = \xi = \eta = 0, \quad h = \mu, \quad \zeta = -\mu.$$

Если A (фиг. 4) представляет элементарный жидкий параллелепипед, ограниченный плоскостями, параллельными координатным плоскостям, то B

[1]) Величины, которые соответствуют количествам $\frac{1}{2}\xi$; $\frac{1}{3}\eta$, $\frac{1}{2}\zeta$, в теории бесконечно малых перемещений непрерывной среды были истолкованы Коши как выражение „среднего вращения“ элемента. Cauchy, Exercices d'Analyse et de Physique, II, 302 (Paris, 1841).

показывает изменение этого элемента, происшедшее в короткое время вследствие только растяжения, а C выражает изменение, произведенное растяжением совместно с вращением.

Легко убедиться, что указанное выше разложение движения является единственным. В самом деле, если мы предположим, что движение относительно точки (x, y, z) может быть составлено из растяжения и из вращения так, что оси и коэфициенты растяжения, а также ось и угловая скорость вращения произвольны, то тогда, вычисляя компоненты относительной скорости δu, δv, δw, мы получим такие же выражения, как и в правой части (3), но с произвольными значениями $a, b, c, f, g, h, \xi, \eta, \zeta$. Сравнивая коэфициенты при δx, δy, δz, мы найдем, однако, что a, b, c и т. д. должны иметь те же значения, что и прежде. Отсюда следует, что направления осей растяжения, величины растяжения или сжатия вдоль них, а также ось и величина завихрения в какой-либо точке зависят только от состояния относительного движения в этой точке, но не от выбора координатных осей.

Если в конечной части жидкости все три компоненты ξ, η, ζ равны нулю, то относительное движение для всякого элемента этой части состоит только из чистого растяжения и называется *безвихревым*.

§ 31. Значение интеграла

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$

или

$$\int \left(u\frac{dx}{ds} + v\frac{dy}{ds} + w\frac{dz}{ds}\right) ds,$$

взятого вдоль произвольной линии $ABCD$, называется *потоком* жидкости вдоль этой линии от A к D[1]). Мы обозначим его для краткости через $J(ABCD)$.

Если A и D совпадают, так что линия $ABCD$ образует замкнутую кривую (или контур), то значение интеграла называют *циркуляцией* вдоль этой замкнутой кривой; будем обозначать ее через $J(ABCA)$. Если мы изменим направление интегрирования в каждом из этих случаев, то знаки величин $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ изменятся на противоположные, и мы будем иметь

$$J(AD) = -J(DA) \quad \text{и} \quad J(ABCA) = -J(ACBA).$$

Также ясно, что

$$J(ABCD) = J(AB) + J(BC) + J(CD).$$

Всякая поверхность может быть разбита на бесконечно малые элементы при помощи двух семейств лежащих на ней линий (фиг. 5). Общая сумма циркуляций вдоль границ элементов, взятых в одном и том

---

[1]) Thomson W., On Vortex Motion, Edin. Trans., XXV (1869) (Papers, IV, 13).